3 次正方行列の対角化

Nobuyuki TOSE

V001 SLIN2019
V002 L11 2020/10/16

$A \in M_3(\mathbb{K})$

$\Phi_A(\lambda) = (\lambda-\alpha_1)(\lambda-\alpha_2)(\lambda-\alpha_3)$

$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{K}$.

$\Updownarrow$

Aが対角化可能

i.e. $\exists P$: 正則

$P^{-1}AP$ 対角行列

対角化可能の十分条件

定理 1

3 次正方行列 $A \in M_3(\mathbf{K})$ の固有多項式

$$\Phi_A(\lambda) = (\lambda - \alpha)(\lambda - \beta)(\lambda - \gamma)$$

が条件

$$\alpha, \beta, \gamma \in \mathbf{K}, \quad \alpha \neq \beta, \beta \neq \gamma, \gamma \neq \alpha$$

を満たすとします．このとき正則な $P \in M_3(\mathbf{K})$ が存在して

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \alpha & & \\ & \beta & \\ & & \gamma \end{pmatrix}$$

と対角化されます．

対角化可能の十分条件（証明）

$$A\vec{p}_1 = \alpha\vec{p}_1,\ A\vec{p}_1 = \beta\vec{p}_2,\ A\vec{p}_1 = \gamma\vec{p}_3$$

$$\vec{p}_j \neq \vec{0} \quad (j = 1, 2, 3)$$

を満たす $\vec{p}_1, \vec{p}_2, \vec{p}_3 \in \mathbf{K}^3$ が存在します．次の定理 2 を用いると $P = (\vec{p}_1\ \vec{p}_2\ \vec{p}_3)$ は正則となります． さらに

$$\begin{aligned} AP &= A(\vec{p}_1\ \vec{p}_2\ \vec{p}_3) = (A\vec{p}_1\ A\vec{p}_2\ A\vec{p}_3) = (\alpha\vec{p}_1\ \beta\vec{p}_2\ \gamma\vec{p}_3) \\ &= (\vec{p}_1\ \vec{p}_2\ \vec{p}_3)\begin{pmatrix} \alpha & & \\ & \beta & \\ & & \gamma \end{pmatrix} = P\begin{pmatrix} \alpha & & \\ & \beta & \\ & & \gamma \end{pmatrix} \end{aligned}$$

から

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \alpha & & \\ & \beta & \\ & & \gamma \end{pmatrix}$$

対角化可能の十分条件（証明）

$\alpha_i \neq \alpha_j \ (i \neq j)$

定理 2

$A \in M_n(\mathbf{K})$, $\alpha_1, \ldots \alpha_\ell \in \mathbf{K}$, $\vec{p}_1, \ldots, \vec{p}_\ell \in \mathbf{K}^n$ が条件

$$A\vec{p}_j = \alpha_j \vec{p}_j, \ \vec{p}_j \neq \vec{0} \quad (j = 1, \ldots, \ell)$$

を満たすとします．このとき $\vec{p}_1, \ldots, \vec{p}_\ell$ は線型独立となります．

$j = \ell$

$(A - \alpha_\ell I_n)\vec{p}_\ell = \vec{0}$.

対角化可能の十分条件（証明）

定理 2 の証明 ℓ に関する帰納法で証明します．$\ell = 1$ の場合は簡単です．一般の ℓ の場合を考えます．そのために $\vec{p}_1, \dots, \vec{p}_\ell$ が

$\to \cdots \to c_1 = c_2 = \cdots = c_{\ell-1} = c_\ell = 0$

$$c_1\vec{p}_1 + \cdots + c_{\ell-1}\vec{p}_{\ell-1} + c_\ell\vec{p}_\ell = \vec{0} \tag{1}$$

$1 \leq j \leq \ell - 1$

を満たすとします．(1) の両辺に $A - \alpha_\ell I_n$ を掛けると

$(A - \alpha_\ell I_n)\vec{p}_j = (\alpha_j - \alpha_\ell)\vec{p}_j$

$$c_1(\alpha_1 - \alpha_\ell)\vec{p}_1 + \cdots + c_{\ell-1}(\alpha_{\ell-1} - \alpha_\ell)\vec{p}_{\ell-1} = \vec{0} \tag{2}$$

となります．帰納法の仮定から $\vec{p}_1, \dots, \vec{p}_{\ell-1}$ は線型独立になります．従って (2) から

$\neq 0$ $\quad -\alpha_\ell)$

$$c_1(\alpha_1 - \alpha_\ell) = \cdots = c_{\ell-1}(\alpha_{\ell-1} = 0 \quad 従って \quad c_1 = \ldots = c_{\ell-1} = 0 \tag{3}$$

$\neq 0$

となります．(1) に代入すると $c_\ell\vec{p}_\ell = \vec{0}$ となりますが，これから $c_\ell = 0$ も従います．

$\vec{p}_\ell \neq \vec{0}$

問題設定

以下では場合分けをして考えます．$A \in M_3(\mathbf{K})$, $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbf{K}$ として

$$\alpha \neq \beta,\ \beta \neq \gamma,\ \gamma \neq \alpha$$

とします．以下では 3 つの場合に分けて A の対角化の必要十分条件について考えていきます．

(I) $\Phi_A(\lambda) = (\lambda - \alpha)(\lambda - \beta)(\lambda - \gamma)$

(II) $\Phi_A(\lambda) = (\lambda - \alpha)^2(\lambda - \beta)$

(III) $\Phi_A(\lambda) = (\lambda - \alpha)^3$

(I) $\Phi_A(\lambda) = (\lambda-\alpha)(\lambda-\beta)(\lambda-\gamma)$ の場合

$A \in M_3(\mathbf{K})$
$\alpha \neq \beta,\ \beta \neq \gamma,\ \gamma \neq \alpha.$

- （定理 1）A は対角化可能，すなわち正則な $P \in M_3(\mathbf{K})$ が存在して

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \alpha & & \\ & \beta & \\ & & \gamma \end{pmatrix}$$

$\vec{p}_1 \in V(\alpha),\ \vec{p}_2 \in V(\beta),\ \vec{p}_3 \in V(\gamma)$
$\vec{p}_1 + \vec{p}_2 + \vec{p}_3 = \vec{0}.$
$\Rightarrow \vec{p}_1 = \vec{p}_2 = \vec{p}_3 = \vec{0}$

- （スペクトル分解可能）$\mathbf{K}^3 = V(\alpha) \oplus V(\beta) \oplus V(\gamma)$

$$\mathbf{K}^3 \supset V(\alpha) \oplus V(\beta) \oplus V(\gamma)$$

$$\dim V(\alpha) \geq 1,\ \dim V(\beta) \geq 1,\ \dim V(\gamma) \geq 1$$

から

$$3 = \dim \mathbf{K}^3 \geq \dim V(\alpha) + \dim V(\beta) + \dim V(\gamma) \geq 1+1+1 = 3$$

等号成立.

となるので

$$\boxed{\dim V(\alpha) = 1,\ \dim V(\beta) = 1,\ \dim V(\gamma) = 1}$$

$$\mathbf{K}^3 = V(\alpha) \oplus V(\beta) \oplus V(\gamma)$$

$$\boxed{\begin{gathered} V \subset W \subset \mathbb{K}^n \\ V = W \iff \dim V = \dim W. \end{gathered}}$$

$$\dim(V_1 \oplus V_2 \oplus V_3) = \dim V_1 + \dim V_2 + \dim V_3$$

$\longrightarrow$ $\mathbb{K}^3 = V(\alpha) \oplus V(\beta) \oplus V(\gamma)$

$\forall \vec{v} \in \mathbb{K}^3 \quad \exists! \vec{v}_1 \in V(\alpha), \exists! \vec{v}_2 \in V(\beta), \exists! \vec{v}_3 \in V(\gamma)$

$\vec{v} = \vec{v}_1 + \vec{v}_2 + \vec{v}_3$ と書ける.

固有空間分解

スペクトル分解.

(I) $\Phi_A(\lambda) = (\lambda - \alpha)(\lambda - \beta)(\lambda - \gamma)$ の場合

$\Phi_A(A) = (A - \alpha I_3)(A - \beta I_3)(A - \gamma I_3)$

$\| \leftarrow$ C-H

O_3

- $\boxed{(A - \alpha I_3)(A - \beta I_3)(A - \gamma I_3)} = O_3$

$\forall \vec{v} \in \cancel{\mathbf{R}^3}$ $\mathbb{K}^3$ を

$$\vec{v} = \vec{v}_1 + \vec{v}_2 + \vec{v}_3, \quad \vec{v}_1 \in V(\alpha),\ \vec{v}_2 \in V(\beta),\ \vec{v}_3 \in V(\gamma)$$

とスペクトル分解します．このとき

$$\begin{aligned}(A - \alpha I_3)(A - \beta I_3)(A - \gamma I_3)\vec{v} &= (A - \beta I_3)(A - \gamma I_3)(A - \alpha I_3)\vec{v}_1 \\ &+ (A - \alpha I_3)(A - \gamma I_3)\boxed{(A - \beta I_3)\vec{v}_2} \\ &+ (A - \alpha I_3)(A - \beta I_3)\boxed{(A - \gamma I_3)\vec{v}_3} \\ &= \vec{0} + \vec{0} + \vec{0} = \vec{0}\end{aligned}$$

$= \vec{0}$

$= \vec{0}$

$= \vec{0}$

$(A - * I_3)(A - \# I_3)$

(III) $\Phi_A(\lambda) = (\lambda - \alpha)^3$ の場合

$= (\lambda - \alpha)(\lambda - \alpha)(\lambda - \alpha)$

A が対角化可能ならば次のページの定理 3 から

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \alpha & & \\ & \alpha & \\ & & \alpha \end{pmatrix} = \alpha I_3$$

$\downarrow P \cdot$

$\llcorner P^{-1}$

$A = P(\alpha I_3)P^{-1}$

$\vdots$

$= \alpha I_3.$

を満たす正則行列 P が存在する．このとき

- $A = \alpha I_3$
- $\mathbf{K}^3 = V(\alpha)$

定理 3

$A \in M_3(\mathbf{K})$ が正則な P と $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ に対して

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \alpha_1 & & * \\ & \alpha_2 & \\ & & \alpha_3 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} \alpha_1 & & \\ & \alpha_2 & \\ * & & \alpha_3 \end{pmatrix}$$

が成立するならば

$$\Phi_A(\lambda) = (\lambda - \alpha_1)(\lambda - \alpha_2)(\lambda - \alpha_3)$$

$$\Phi_{P^{-1}AP}(\lambda) = \Phi_{\begin{pmatrix} \alpha_1 & & \\ & \alpha_2 & \\ & & \alpha_3 \end{pmatrix}}(\lambda)$$

II $\Phi_A(\lambda) = (\lambda-\alpha)^2(\lambda-\beta)$ の場合 　$A \in M_3(\mathbb{K})$ 　$\alpha \neq \beta$.

明らか. 　　$=$ 対角化可能. 　$\mathbb{K}^3 \supset V(\alpha)$, 3次元 $=$ 3次元

・ $1 \le \dim V(\alpha) \le 2$

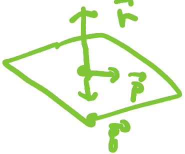
背理法で示す．$\dim V(\alpha) = 3$ とすると $V(\alpha) = \mathbf{K}^3$ となるが，任意の $\vec{v} \in \mathbf{K}^3$ に対して $A\vec{v} = \alpha\vec{v}$ から $A = \alpha I_3$ となる．$\Phi_A(\lambda) = (\lambda-\alpha)^3$ となるので矛盾が生じる．

・ $\dim V(\beta) = 1$ 　　$\Phi_A(\beta) = (\beta-\alpha)^3 \neq 0$

$\dim V(\beta) \ge 1$ は明らかである．$\dim V(\beta) \ge 2$ とすると $\vec{p} \nparallel \vec{q}$ を満たす $\vec{p}, \vec{q} \in V(\beta)$ が存在する．このとき $A\vec{p} = \beta\vec{P}$, $A\vec{q} = \beta\vec{q}$ となります．さらに $\vec{r} \in \mathbf{K}^3$ を選んで $P := (\vec{p}\ \vec{q}\ \vec{r})$ が正則であるようにすると

"$(\beta\vec{p}\ \ \beta\vec{q}\ \ *)$ 　　$*_1\vec{p} + *_2\vec{q} + *_3\vec{r}$

$$A(\vec{p}\ \vec{q}\ \vec{r}) = (\vec{p}\ \vec{q}\ \vec{r})\begin{pmatrix} \beta & 0 & *_1 \\ & \beta & *_2 \\ & & *_3 \end{pmatrix} \quad \text{従って} \quad P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \beta & 0 & *_1 \\ & \beta & *_2 \\ & & *_3 \end{pmatrix}$$



となります．このとき $\Phi_A(\lambda) = (\lambda-\beta)^2(\lambda - *_3)$ から矛盾が生じます．

$= \Phi_{P^{-1}AP}(\lambda)$

一般には

$A \in M_n(\mathbf{K})$ の固有多項式がある $g(\lambda) \in \mathbf{K}[\lambda]$ を用いて　$\alpha \in \mathbb{K}$.

$$\Phi_A(\lambda) = (\lambda - \alpha)^m g(\lambda), \quad g(\alpha) \neq 0, \quad m \geq 1$$

と表されているとします．このとき

$$1 \leq V(\alpha) \leq m$$

が成立します．

II $\Phi_A(\lambda) = (\lambda - \alpha)^2(\lambda - \beta)$ の場合

2次元 1次元.
$\mathbb{K}^3 \overset{?}{=} V(\alpha) \oplus V(\beta)$

$= \iff \dim V(\alpha) = 2.$

$\mathbb{K}^3 = V(\alpha) \oplus V(\beta)$

$\Updownarrow$

$\dim V(\alpha) = 2$, $\dim \cancel{V(\beta) = 1}$ ならば A は対角化可能である.

2次元 1次元.

$$\mathbf{K}^3 = V(\alpha) \oplus V(\beta)$$

となります. $V(\alpha)$ の基底 $\vec{p}_1, \vec{p}_2, V(\beta)$ の基底 $\vec{p}_3$ をとると $P = (\vec{p}_1\ \vec{p}_2\ \vec{p}_3)$ は正則で

$$AP = P\begin{pmatrix} \alpha & & \\ & \alpha & \\ & & \beta \end{pmatrix} \longrightarrow P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \alpha & & \\ & \alpha & \\ & & \beta \end{pmatrix}$$

$= (\alpha\vec{p}_1\ \alpha\vec{p}_2\ \beta\vec{p}_3)$

$= (\vec{p}_1\ \vec{p}_2\ \vec{p}_3)\begin{pmatrix} \alpha & & \\ & \alpha & \\ & & \beta \end{pmatrix}$

と A は対角化されます.

II $\Phi_A(\lambda) = (\lambda - \alpha)^2(\lambda - \beta)$ の場合

A が対角化可能ならば $\mathbf{K}^3 = V(\alpha) \oplus V(\beta)$ このとき

$$\Updownarrow$$

$$\dim V(\alpha) = 2,\ \dim V(\beta) = 1$$

正則な $P = (\vec{p}_1\ \vec{p}_2\ \vec{p}_3) \in M_3(\mathbf{K})$ に対して

$$AP = P \begin{pmatrix} *_1 & & \\ & *_2 & \\ & & *_3 \end{pmatrix}$$

$*_1$ $*_2$ $*_3$ のうち
2個α, 1個がβ.

が成立すると $\vec{p}_1, \vec{p}_2, \vec{p}_3 \in V(\alpha) \oplus V(\beta)$ となります. $\vec{p}_1, \vec{p}_2, \vec{p}_3$ が線型独立なので

$$\dim\left(V(\alpha) \oplus V(b\cancel{eta})\right) = 3$$

β

となりますから

$$\mathbf{K}^3 = V(\alpha) \oplus V(\beta)$$

2次元, 1次元

このとき $\dim V(\beta) = 1$ なので

$$\dim V(\alpha) = 3 - \dim V(\beta) = 2$$

II $\Phi_A(\lambda) = (\lambda-\alpha)^2(\lambda-\beta)$ の場合

> A が対角化可能ならば $(A-\alpha I_3)(A-\beta I_3) = O_3$

このとき

$$\mathbf{K}^3 = V(\alpha) \oplus V(\beta)$$

固有空間分解.

となります．任意の $\vec{v} \in \mathbf{K}^3$ に対して

$$\vec{v} = \vec{v}_1 + \vec{v}_2, \quad \vec{v}_1 \in V(\alpha), \quad \vec{v}_2 \in V(\beta)$$

と（スペクトル）分解すると

〃 $\vec{0}$

$$(A-\beta I_3)\boxed{(A-\alpha I_3)\vec{v}_1} = \vec{0}$$
$$(A-\alpha I_3)\boxed{(A-\beta I_3)\vec{v}_2} = \vec{0}$$

$= (A-\alpha I_3)(A-\beta I_3)\vec{v}_1$
$+ (A-\alpha I_3)(A-\beta I_3)\vec{v}_2$
$= \vec{0} + \vec{0}$

から

$$(A-\alpha I_3)(A-\beta I_3)\vec{v} = \vec{0}$$

II $\Phi_A(\lambda) = (\lambda-\alpha)^2(\lambda-\beta)$ の場合

$(A-\alpha I_3)(A-\beta I_3) = O_3$ ならば A は対角化可能

$\vec{v} = (P_1 + P_2)\vec{v}$ $= I_3\vec{v}$

$$\frac{\lambda-\alpha}{\beta-\alpha} + \frac{\lambda-\beta}{\alpha-\beta} = 1$$

$= P_1\vec{v} + P_2\vec{v}$

$= \vec{v}_1 + \vec{v}_2$

が（恒等的に）成立します．これから

$$P_1 = \frac{1}{\beta-\alpha}(A-\alpha I_3) + \frac{1}{\alpha-\beta}(A-\beta I_3) = I_3$$

" P_2 "

$P_1 P_2 = O_3$

$P_1\vec{v}_2 = P_1 P_2 \vec{v}$

$= O_3\vec{v} = \vec{0}$

が成立します．これから任意の $\vec{v} \in \mathbf{K}^3$ に対して

$$\vec{v}_1 = \frac{1}{\beta-\alpha}(A-\alpha I_3)\vec{v}, \quad \vec{v}_2 = \frac{1}{\alpha-\beta}(A-\beta I_3)\vec{v}$$

$\to (A-\alpha I_3)\vec{v}_2 = \vec{0}$

と定めると

$= P_1\vec{v}$ $V(\alpha)$ $= P_2\vec{v}$

$(A-\beta I_3)\vec{v}_1 = \vec{0}$

$$V(\beta)\ \ v = \vec{v}_1 + \vec{v}_2, \quad \vec{v}_1 \in V(\alpha), \quad \vec{v}_2 \in V(\beta)$$

が従います．これから $\mathbf{K}^3 = V(\alpha) \oplus V(\beta)$

A は対角化可能 $\Longleftrightarrow$ $\mathbb{K}^3 = V(\alpha) \oplus V(\beta)$

$$\Updownarrow$$

$\dim V(\alpha) = 2$

$\Longleftrightarrow$ $(A - \alpha I_3)(A - \beta I_3) = O_3.$

まとめ

(I) $\Phi_A(\lambda) = (\lambda - \alpha)(\lambda - \beta)(\lambda - \gamma)$ の場合

- A は対角化可能
- $\mathbf{K}^3 = V(\alpha) \oplus V(\beta) \oplus V(\gamma)$ ←
- $(A - \alpha I_3)(A - \beta I_3)(A - \gamma I_3) = O_3$

(最小多項式)

(II) $\Phi_A(\lambda) = (\lambda - \alpha)^2(\lambda - \beta)$ の場合

$$A\text{は対角化可能} \Leftrightarrow \mathbf{K}^3 = V(\alpha) \oplus V(\beta)$$

$\Leftrightarrow \dim V(\alpha) = 2.$

$$\Leftrightarrow (A - \alpha I_3)(A - \beta I_3) = O_3$$

(II) $\Phi_A(\lambda) = (\lambda - \alpha)^3$ の場合

$$A\text{は対角化可能} \Leftrightarrow \mathbf{K}^3 = V(\alpha)$$

$$\Leftrightarrow A = \alpha I_3$$

Jordan標準形

最小多項式の根はすべて単純.

$\alpha \neq \beta$

II $\quad \Phi_A(\lambda) = (\lambda - \alpha)^2 (\lambda - \beta)$

$(A - \alpha I_3)(A - \beta I_3) \neq O_3$

$\exists P \in M_3(\mathbb{K})$ P正則

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \alpha & 1 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & \beta \end{pmatrix}$$

III $\quad \Phi_A(\lambda) = (\lambda - \alpha)^3$

(i) $(A - \alpha I_3) \neq O_3$

$(A - \alpha I_3)^2 = O_3$

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \alpha & 1 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix}$$

(ii) $(A - \alpha I_3) \neq O_3$

$(A - \alpha I_3)^2 \neq O_3$

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \alpha & 1 & 0 \\ 0 & \alpha & 1 \\ 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix}$$

時間があれば解説（教科書）