行列の積と行列式

A, B 2次(3次)正方行列 → AB: — 正方行列.

$|AB| = |A| \cdot |B|$.

(VI) 行列の積と行列式　行列の積と行列式は交換します．すなわち，n 次正方行列 $A, B \in M_n(\mathbf{K})$ に対して

$$\det(AB) = \det(A)\det(B)$$

$AB \in M_n(\mathbb{K})$
$n \times n$.

次のスライドにある行列式の普遍性から証明されます.

行列式の普遍性 (1)

定理（行列式の普遍性）$\mathbf{K}^n$ の n 個の直積から実数の値を取る写像

$$F: \underbrace{\mathbf{K}^n \times \cdots \times \mathbf{K}^n}_{n\text{個}} \longrightarrow \mathbf{K}$$

が次の性質 **(i)** と **(ii)** を満たすとします.

(i)（多重線型性）

j 番目

$$F(\cdots, \lambda\vec{x} + \mu\vec{y}, \cdots) = \lambda F(\cdots, \overset{j}{\vec{x}}, \cdots) + \mu F(\cdots, \vec{y}, \cdots)$$

(ii)（交代性）$i \neq j$ において

$I_n = (\vec{e}_1 \cdots \vec{e}_n)$

$$F(\cdots, \vec{a}_i, \cdots, \vec{a}_j, \cdots) = -F(\cdots, \vec{a}_j, \cdots, \vec{a}_i, \cdots)$$

このとき $F(\vec{a}_1, \cdots, \vec{a}_n) = \det(\vec{a}_1 \ \cdots \ \vec{a}_n) \cdot F(\vec{e}_1, \cdots, \vec{e}_n)$

行列式の普遍性 (2)

注意上で F の代わりに $(\mathbf{K}^n)^*$ の n 個の直積上定義された $G\colon (\mathbf{K}^n)^* \times \cdots \times (\mathbf{K}^n)^* \to \mathbf{K}$ をを考えると，多重線型性と交代性を仮定するならば

$$G(\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n) = \det \begin{pmatrix} \mathbf{a}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{a}_n \end{pmatrix} \cdot G(\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n)$$

$e_1 = (1\ 0 \cdots 0)$
$e_2 = (0\ 1\ 0 \cdots 0)$
$\vdots$

が成立します.

行列式の普遍性 (3)

(ii) から

$$F(\cdots, \vec{a}, \cdots, \vec{a}, \cdots) = 0$$

$i \qquad j$

$= -F(\cdots \underset{i}{\vec{a}} \cdots \vec{a} \cdots)$

$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{pmatrix} = a_1\vec{e}_1 + a_2\vec{e}_2 + a_3\vec{e}_3 + a_4\vec{e}_4$

$n = 4$ のとき

$$F(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d}) = F(\sum_{i=1}^{4} a_i\vec{e}_i, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d}) = \sum_{i=1}^{4} a_i F(\vec{e}_i, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d})$$

$$= \sum_{i=1}^{4} a_i F(\vec{e}_i, \sum_{j=1}^{4} b_j\vec{e}_j, \vec{c}, \vec{d}) = \sum_{1\le i,j\le 4} a_i b_j F(\vec{e}_i, \vec{e}_j, \vec{c}, \vec{d})$$

$$= \cdots = \sum_{1\le i,j,k,\ell\le 4} a_i b_j c_k d_\ell F(\vec{e}_i, \vec{e}_j, \vec{e}_k, \vec{e}_\ell)$$

$F(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_1, \vec{e}_4)$

4

0

最右辺の総和において $\{i, j, k, \ell\} = \{1, 2, 3, 4\}$ とならない限り $F(\vec{e}_i, \vec{e}_j, \vec{e}_k, \vec{e}_\ell) = 0$

行列式の普遍性 (4)

ここで $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ i & j & k & \ell \end{pmatrix}$ とすると

$\sigma = \sigma_1 \cdots \sigma_\ell \quad \sigma_j$: 互換.

$$F(\vec{e}_i, \vec{e}_j, \vec{e}_k, \vec{e}_\ell) = F(\vec{e}_{\sigma(1)}, \vec{e}_{\sigma(2)}, \vec{e}_{\sigma(3)}, \vec{e}_{\sigma(4)}) = \varepsilon(\sigma) \cdot F(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3, \vec{e}_4) \quad \#$$

$\varepsilon(\sigma) = (-1)^\ell$

従って

$\{i, j, k, \ell\} = \{1, 2, 3, 4\}$ #

$$\begin{aligned}
F(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d}) &= \sum_{\sigma \in S_4} a_{\sigma(1)} b_{\sigma(2)} c_{\sigma(3)} d_{\sigma(4)} F(\vec{e}_{\sigma(1)}, \vec{e}_{\sigma(2)}, \vec{e}_{\sigma(3)}, \vec{e}_{\sigma(4)}) \\
&= \sum_{\sigma \in S_n} a_{\sigma(1)} b_{\sigma(2)} c_{\sigma(3)} d_{\sigma(4)} \cdot \varepsilon(\sigma) \boxed{F(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3, \vec{e}_4)} \\
&= F(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3, \vec{e}_4) \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) \cdot a_{\sigma(1)} b_{\sigma(2)} c_{\sigma(3)} d_{\sigma(4)} \\
&= F(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3, \vec{e}_4) \det(\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c}\ \vec{d})
\end{aligned}$$

← σ に依らない.

$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ i_1 & i_2 & i_3 & \cdots & i_n \end{pmatrix}$

公式 (VI) を示す (1)

$A,\ B \in M_n(\mathbf{K})$ とします．このとき

$$F : \mathbf{K}^n \times \cdots \times \mathbf{K}^n \longrightarrow \mathbf{K}$$

を定義式

$$F(\vec{b}_1, \ldots, \vec{b}_n) := \det(A\vec{b}_n \ \cdots \ A\vec{b}_n)$$

によって定めます．このとき

$$\begin{aligned} F(\ldots, \lambda\vec{x} + \mu\vec{y}, \ldots) &= |\cdots \ A(\lambda\vec{x} + \mu\vec{y}) \ \cdots| = |\cdots \ \lambda A\vec{x} + \mu A\vec{y} \ \cdots| \\ &= \lambda|\cdots \ A\vec{x} \ \cdots| + \mu|\cdots \ A\vec{y} \ \cdots| \\ &= \lambda \cdot F(\ldots, \vec{x}, \ldots) + \mu \cdot F(\ldots, \vec{y}, \ldots) \end{aligned}$$

と普遍性の定理の **(i)** が OK．また $i < j$ のとき　i列　j列.

$$\begin{aligned} F(\ldots, \vec{b}_i, \ldots, \vec{b}_j, \ldots) &= \begin{vmatrix} \cdots & A\vec{b}_i & \cdots & A\vec{b}_j & \cdots \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} \cdots & A\vec{b}_j & \cdots & A\vec{b}_i & \cdots \end{vmatrix} \\ &= -F(\ldots, \underset{i列}{\vec{b}_j}, \ldots, \underset{j列}{\vec{b}_i}, \ldots) \end{aligned}$$

から普遍性の定理の **(ii)** も OK.　iに成る — jに成る.

公式 (VI) を示す (2)

普遍性の定理を適用して

$= |A\vec{e}_1 \ \ A\vec{e}_2 \cdots A\vec{e}_n|$

$$F(\vec{b}_1, \ldots, \vec{b}_n) = \underbrace{F(\vec{e}_1, \cdots, \vec{e}_n)}_{= \det(A)} \cdot \underbrace{\det(\vec{b}_1 \ \cdots \ \vec{b}_n)}_{= \det(B)}$$

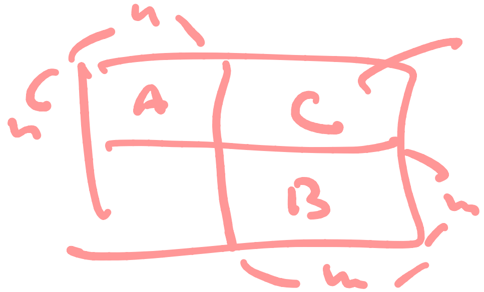
となります．さらに

$$F(\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n) = \det(A\vec{e}_1 \ \ldots \ A\vec{e}_n) = \det(\vec{a}_1 \ \cdots \ \vec{a}_n) = \det(A).$$

よって

$$\underbrace{\begin{vmatrix} A\vec{b}_1 & \cdots & A\vec{b}_n \end{vmatrix}}_{= |AB|} = |\vec{a}_1 \ \cdots \ \vec{a}_n| \cdot \begin{vmatrix} \vec{b}_1 & \cdots & \vec{b}_n \end{vmatrix}, \quad \text{すなわち } |AB| = |A| \cdot |B|$$

普遍性の定理の応用 (1)



n行m列

$A \in M_n(\mathbf{K})$ と $B \in M_m(\mathbf{K})$, $C \in M_{n,m}(\mathbf{K})$ に対して

$$\det\left(\begin{array}{c|c} A & C \\ \hline O_{m,n} & B \end{array}\right) = \det(A) \cdot \det(B)$$

(m+n)次正方行列

普遍性の定理の応用 (2)

n 個

$$F: \mathbf{K}^n \times \cdots \times \mathbf{K}^n \longrightarrow \mathbf{K}$$

A

$$F(\vec{a}_1, \cdots, \vec{a}_n) := \det \left(\begin{array}{ccc|c} \vec{a}_1 & \cdots & \vec{a}_n & C \\ \hline & O_{m,n} & & B \end{array} \right)$$

固定.

は普遍性の定理の **(i)** と **(ii)** を満たします．よって

I_n

$$\begin{aligned} & \det \left(\begin{array}{ccc|c} \vec{a}_1 & \cdots & \vec{a}_n & C \\ \hline & O_{m,n} & & B \end{array} \right) \\ = \; & \det(\vec{a}_1 \; \cdots \; \vec{a}_n) \cdot \det \left(\begin{array}{ccc|c} \vec{e}_1 & \cdots & \vec{e}_n & C \\ \hline & O_{m,n} & & B \end{array} \right) \\ = \; & \det(A) \cdot \det \left(\begin{array}{c|c} I_n & C \\ \hline O_{m,n} & \boxed{B} \end{array} \right) \end{aligned}$$

$\det(B)$ "

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{b}_1 \\ \vdots \\ \boldsymbol{b}_m \end{pmatrix}$$

普遍性の定理の応用 (3)

$\mathbf{b}_j \in (\mathbb{K}^m)^*$

$$G(\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_m) = \left|\begin{array}{c|c} I_n & C \\ \hline \mathbf{0} & \mathbf{b}_1 \\ \vdots & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{b}_m \end{array}\right|$$

と定義すると，行に関する普遍性の定理（注意）が適用できて

$$\underset{\det\begin{pmatrix}\mathbf{b}_1\\ \vdots \\ \mathbf{b}_m\end{pmatrix}}{\underset{\|}{G(\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_m)}} = \det(B) \underbrace{\det \left(\begin{array}{c|c} I_n & C \\ \hline O_{m,n} & \boxed{I_m} \end{array}\right)}_{F(\mathbf{e}_1 \cdots \mathbf{e}_n) = 1.} = \det(B)$$

上三角.

普遍性の定理の応用 (4)

特に $B \in M_{n-1}(\mathbf{K})$ に対して

$$\det \underbrace{\left(\begin{array}{c|ccc} 1 & * & \cdots & * \\ \hline 0 & & & \\ \vdots & & B & \\ 0 & & & \end{array}\right)}_{\in M_n(\mathbf{K})} = \det(B) \tag{4}$$

余因子展開に従う.

普遍性の定理の応用 (5)

以上と同様に $A \in M_n(\mathbf{K})$ と $B \in M_m(\mathbf{K})$，$C \in M_{m.n}(\mathbf{K})$ に対して

$$\det\left(\begin{array}{c|c} A & \boxed{O_{n,m}} \\ \hline C & B \end{array}\right) = \det(A) \cdot \det(B) \tag{5}$$

が成立します．このことから $B \in M_{n-1}(\mathbf{K})$ に対して

$$\det\left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \hline * & & & \\ \vdots & & B & \\ & & & \end{array}\right) = \det(B) \tag{6}$$

余因子展開で従う．