行と列の置換 (1)

$A = (\vec{a}_1 \ \cdots \ \vec{a}_n) \in M_n(\mathbf{K})$ と $\sigma \in S_n$ に対して

$\{\sigma(1), \dots, \sigma(n)\} = \{1, 2, \dots, n\}$

$$\det(\vec{a}_{\sigma(1)} \ \cdots \ \vec{a}_{\sigma(n)}) = \sum_{\tau \in S_n} \varepsilon(\tau) \cdot a_{\tau(1)\sigma(1)} a_{\tau(2)\sigma(2)} \cdots a_{\tau(n)\sigma(n)}$$

$a_{\tau(i), \sigma(i)}$

- $\sigma(i) = 1$ のとき $i = \sigma^{-1}(1)$ なので $a_{\tau(i)\sigma(i)} = a_{\tau(\sigma^{-1}(1))1}$
- $\sigma(i) = 2$ のとき $i = \sigma^{-1}(2)$ なので $a_{\tau(i)\sigma(i)} = a_{\tau(\sigma^{-1}(2))2}$
- $\sigma(i) = j$ のとき $i = \sigma^{-1}(j)$ なので $a_{\tau(i)\sigma(i)} = a_{\tau(\sigma^{-1}(j))j}$

なので

$$\begin{aligned} &\varepsilon(\tau) \cdot a_{\tau(1)\sigma(1)} a_{\tau(2)\sigma(2)} \cdots a_{\tau(n)\sigma(n)} \\ &= \varepsilon(\tau\sigma^{-1})\varepsilon(\sigma) \cdot a_{\tau\sigma^{-1}(1)1} a_{\tau\sigma^{-1}(2)2} \cdots a_{\tau\sigma^{-1}(n)n} \end{aligned}$$

$\tau = \tau\sigma^{-1} \cdot \sigma$

$\varepsilon(\tau) = \varepsilon(\tau\sigma^{-1}) \cdot \varepsilon(\sigma)$

$$|\vec{a}\ \ \vec{b}\ \ \vec{c}| = -|\vec{c}\ \ \vec{b}\ \ \vec{a}|$$

$$\begin{vmatrix} a_1 \\ \mathbb{b} \\ \mathbb{c} \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a_1 \\ \mathbb{c} \\ \mathbb{b} \end{vmatrix}$$

$$|A| = \sum_{\tau \in S_n} \varepsilon(\tau)\, a_{1\tau(1)}\, a_{2\tau(2)} \cdots a_{n\tau(n)}.$$

Σ 用いると.

行と列の置換 (2)

Ω 有限　$f : \Omega \to \mathbb{K}$

$\sum_{\omega} f(\omega) = \sum_{\omega} f(g(\omega))$

$g : \Omega \to \Omega$ 全単射.

$$
\begin{aligned}
&\det(\vec{a}_{\sigma(1)} \ \cdots \ \vec{a}_{\sigma(n)}) \\
&= \sum_{\tau \in S_n} \varepsilon(\tau\sigma^{-1})\varepsilon(\sigma) \cdot a_{\tau\sigma^{-1}(1)1} a_{\tau\sigma^{-1}(2)2} \cdots a_{\tau\sigma^{-1}(n)n} \\
&= \varepsilon(\sigma) \sum_{\tau \in S_n} \varepsilon(\tau\sigma^{-1}) \cdot a_{\tau\sigma^{-1}(1)1} a_{\tau\sigma^{-1}(2)2} \cdots a_{\tau\sigma^{-1}(n)n} \\
&= \varepsilon(\sigma) \sum_{\rho \in S_n} \varepsilon(\rho) \cdot a_{\rho(1)1} a_{rho(2)2} \cdots a_{\rho(n)n} \\
&= \varepsilon(\sigma) \det(\vec{a}_1 \ \ldots \ \vec{a}_n)
\end{aligned}
$$

τに依らない

$\rho = \tau\sigma^{-1}$

ρ

$S_n \xrightarrow{g} S_n$

$\tau \mapsto \tau\sigma^{-1}$

全単射

(容易)

行と列の置換 (3)

(II)（列に関する交代性）

$$\det(\vec{a}_{\sigma(1)} \ \cdots \ \vec{a}_{\sigma(n)}) = \varepsilon(\sigma) \cdot \det(\vec{a}_1 \ \cdots \ \vec{a}_n) \tag{1}$$

特に $\sigma \in S_n$ が互換 $(i\ j)$ であるとき $(i \neq j)$ $\varepsilon((i\ j)) = -1$.

$$\det(\cdots \ \vec{a}_i \ \cdots \ \vec{a}_j \ \cdots) = -\det(\cdots \ \vec{a}_j \ \cdots \ \vec{a}_i \ \cdots) \tag{2}$$

(II)（行に関する交代性）

行

$$\begin{vmatrix} \mathbf{a}_{\sigma(1)} \\ \vdots \\ \mathbf{a}_{\sigma(n)} \end{vmatrix} = \varepsilon(\sigma) \begin{vmatrix} \mathbf{a}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{a}_n \end{vmatrix}, \quad \text{特に } i \neq j \text{ のときに } \begin{vmatrix} \vdots \\ \mathbf{a}_i \\ \vdots \\ \mathbf{a}_j \\ \vdots \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} \vdots \\ \mathbf{a}_j \\ \vdots \\ \mathbf{a}_i \\ \vdots \end{vmatrix} \tag{3}$$

行と列の置換 (4)

(IV) 異なる 2 列（2 行）が等しい行列の行列式は 0 となります.

$$\left|\cdots\vec{a}\cdots\vec{a}\cdots\right| = 0, \quad \begin{vmatrix} \vdots \\ \mathbf{a} \\ \vdots \\ \mathbf{a} \\ \vdots \end{vmatrix} = 0$$

$$= -\left|\cdots\vec{a}\cdots\vec{a}\cdots\right|$$

$$\left|\cdots\vec{a}\cdots\vec{a}\cdots\right| = 0$$

$$= -\begin{vmatrix} \vdots \\ a_1 \\ \vdots \\ a_1 \\ \vdots \end{vmatrix}$$

三角行列の行列式・正~~則~~性 規

$\det \begin{pmatrix} \alpha_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \alpha_n \end{pmatrix}$

$= \alpha_1 \cdots \alpha_n.$

$$\begin{vmatrix} \alpha & * & * & * \\ 0 & \beta & * & * \\ 0 & 0 & \gamma & * \\ 0 & 0 & 0 & \delta \end{vmatrix} = \alpha\beta\gamma\delta$$

$\sum_{\sigma} \underbrace{\varepsilon(\sigma)}_{=1} \underbrace{a_{\sigma(1)1}}_{=\alpha} \underbrace{a_{\sigma(2)2}}_{=\beta} \underbrace{a_{\sigma(3)3}}_{=\gamma}$

$\sigma(1) \neq 1$ ならば $a_{\sigma(1)1} = 0.$ $\underbrace{a_{\sigma(4)4}}_{=\delta}.$

$\{\sigma(1) = 1\}$ $\sigma(2) \neq 1.$

$\{\sigma(1)=1, \sigma(2)=2\}$

$\{\sigma(1)=1, \sigma(2)=2, \sigma(3)=3\}$

$\sigma(4) = 4.$

$\rightsquigarrow \sigma = 1.$

$$\begin{vmatrix} \alpha & 0 & 0 & 0 \\ * & \beta & 0 & 0 \\ * & * & \gamma & 0 \\ * & * & * & \delta \end{vmatrix} = \alpha\beta\gamma\delta$$

特に

(III) (正規性)

$$\det(I_n) = 1$$

多重線型性 (1)—補題

(列の場合) $F: \mathbf{K}^n \longrightarrow \mathbf{K}$

$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \ \vec{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$

$$\vec{x} \mapsto F(\vec{x}) = \alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_n x_n$$

は $F(\lambda\vec{x} + \mu\vec{y}) = \lambda F(\vec{x}) + \mu F(\vec{y})$ を満たします.

n次元
行ベクトルの全体.

(行の場合) $F: (\mathbf{K}^n)^* \longrightarrow \mathbf{K}$

$$\mathbf{x} \mapsto F(\mathbf{x}) = \alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_n x_n$$

は $F(\lambda\mathbf{x} + \mu\mathbf{y}) = \lambda F(\mathbf{x}) + \mu F(\mathbf{y})$ を満たします.

多重線型性 (2)

(I)（行と列に関する線型性）　行列式の各列，各行に関して線型性が成立して，第 j 列の（第 i 行の）足し算とスカラー倍と行列式の操作は交換します.

$$|\cdots \lambda\vec{b}_j + \mu\vec{c}_j \ \cdots| = \lambda \cdot |\cdots \vec{b}_j \ \cdots| + \mu \cdot |\cdots \vec{c}_j \ \cdots|$$

$$\begin{vmatrix} \vdots \\ \lambda\mathbf{b}_i + \mu\mathbf{c}_i \\ \vdots \end{vmatrix} = \lambda \begin{vmatrix} \vdots \\ \mathbf{b}_i \\ \vdots \end{vmatrix} + \mu \begin{vmatrix} \vdots \\ \mathbf{c}_i \\ \vdots \end{vmatrix}$$

$$\left| \vec{a} \quad \lambda\vec{\alpha}+\mu\vec{\beta} \quad \vec{c} \quad \vec{d} \right|$$

$$\lambda \alpha_{\sigma(2)} + \mu \beta_{\sigma(2)}$$

$$= \sum_{\sigma} \varepsilon(\sigma)\, a_{\sigma(1)} \boxed{(\lambda\vec{\alpha}+\mu\vec{\beta})_{\sigma(2)}}\, c_{\sigma(3)}\, d_{\sigma(4)}$$

$$= \lambda \sum_{\sigma} \varepsilon(\sigma)\, a_{\sigma(1)}\, \alpha_{\sigma(2)}\, c_{\sigma(3)}\, d_{\sigma(4)}$$

$$+ \mu \sum_{\sigma} \varepsilon(\sigma)\, a_{\sigma(1)}\, \beta_{\sigma(2)}\, c_{\sigma(3)}\, d_{\sigma(4)}$$

$$= \lambda \left| \vec{a} \ \vec{\alpha} \ \vec{c} \ \vec{d} \right| + \mu \left| \vec{a} \ \vec{\beta} \ \vec{c} \ \vec{d} \right|$$

2 3 4 a [illegible]

行列式の計算 (1)—掃き出し法

(V)　$i \neq j$ のとき i 列（i 行）の λ 倍を j 列（j 行）に加えても行列式の値は変わりません．

$$|\cdots \vec{a}_i \cdots \vec{a}_j \cdots| = |\cdots \vec{a}_i \cdots \vec{a}_j + \lambda \vec{a}_i \cdots|, \qquad \begin{vmatrix} \vdots \\ \mathbf{a}_i \\ \vdots \\ \mathbf{a}_j \\ \vdots \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \vdots \\ \mathbf{a}_i \\ \vdots \\ \mathbf{a}_j + \lambda \mathbf{a}_i \\ \vdots \end{vmatrix}$$

$$= |\cdots \vec{a}_i \cdots \vec{a}_j \cdots| + \lambda \underbrace{|\cdots \vec{a}_i \cdots \vec{a}_i \cdots|}_{=0}$$

行列式の計算 (2)—掃き出し法

$1r \Leftrightarrow 3r$

$2r \mathrel{+}= 1r \times (-2)$

$4r \mathrel{+}= 1r \times (-2)$

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 3 & 4 \\ 2 & 0 & -5 & 1 \\ 1 & 4 & 2 & -7 \\ 2 & -4 & -6 & 3 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 4 & 2 & -7 \\ 2 & 0 & -5 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 4 \\ 2 & -4 & -6 & 3 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 4 & 2 & -7 \\ 0 & -8 & -9 & 15 \\ 0 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & -12 & -10 & 17 \end{vmatrix}$$

$(-1)^2$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 4 & 2 & -7 \\ 0 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & -8 & -9 & 15 \\ 0 & -12 & -10 & 17 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 2 & -7 \\ 0 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 15 & 47 \\ 0 & 0 & 26 & 65 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 2 & -7 \\ 0 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 15 & 47 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{247}{15} \end{vmatrix} = -247$$

$2r \Leftrightarrow 3$

$3r \mathrel{+}= 2r \times 8$

$4r \mathrel{+}= 2r \times 12.$

$4r \mathrel{+}= 3r \times \left(-\frac{26}{15}\right)$

$1.1.\ \begin{vmatrix} 15 & 47 \\ 26 & 65 \end{vmatrix}$