3 次元固有値問題 (2)

— 部分空間の和・直和.

戸瀬　信之

ITOSE PROJECT

2011 年 10 月 18 日 at 駒場
2019 年 10 月 11 日 at 駒場
V04 2020 年 10 月 9 日 at 駒場上空

具体例 (1)—固有方程式が重根をもつ場合

3 次正方行列

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 4 \end{pmatrix} \tag{1}$$

の固有値と固有ベクトルを求めます.

具体例 (2)—固有方程式

行基本変形を使う.

$|\lambda I_3 - A|$ $\lambda = 1$ 2行$+=3$行

$$\Phi_A(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda-1 & -2 & -2 \\ -1 & \lambda-2 & 1 \\ 1 & -1 & \lambda-4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda-1 & -2 & -2 \\ 0 & \lambda-3 & \lambda-3 \\ 1 & -1 & \lambda-4 \end{vmatrix} = (\lambda-3)\begin{vmatrix} \lambda-1 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & \lambda-4 \end{vmatrix}$$

$(\lambda-3)(0\ 1\ 1)$ $(0\ 1\ 1)$ $\times(-\frac{1}{2})$ $(0\ {-2}\ {-2})$

1行$+=2$行$\times 2$

$$= (\lambda-3)\begin{vmatrix} \lambda-1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & \lambda-4 \end{vmatrix} = (\lambda-1)(\lambda-3)\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & \lambda-4 \end{vmatrix}$$

余因子展開

$$= (\lambda-1)(\lambda-3)\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & \lambda-4 \end{vmatrix} = (\lambda-1)(\lambda-3)^2$$

から A の固有値は $\lambda = 1, 3$(重根) であることが分かります.

一般論では対角化できるか分からない.

具体例 (3)—固有ベクトル

(i) $\lambda = 1$ のとき行列式の計算における行基本変形を用いると

$(I_3 - A)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \vec{0} \iff$

$$A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \Leftrightarrow \boxed{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \vec{0} \qquad (\#1)$$

$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \vec{0}$

$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -3 \end{pmatrix}$

↓ 3行+2行

$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$

であることが分かりますから

$$(\#1) \Leftrightarrow x = 2z, \ \ y = -z$$

となります．これから固有ベクトルは

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2z \\ -z \\ z \end{pmatrix} = z\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad (z \neq 0)$$

であることが分かります．

具体例 (3)—固有ベクトル

$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathrm{Ker}(A-3I_3)$ 核空間(?)

$\Downarrow$ $V(3)$

(ii) $\underline{\lambda = 3\text{ のとき}}$ 上の行列式の計算の行基本変形を用いて

$$(3I_3 - A)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \vec{0} \Leftrightarrow A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 3\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \vec{0} \Leftrightarrow x - y - z = 0 \qquad (\#2)$$

$\cdots \to \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

となります．これから固有ベクトルは

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y+z \\ y \\ z \end{pmatrix} = y\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad (y \neq 0 \text{ OR } z \neq 0)$$

$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ が $V(3)$ の基底．

であることが分かります．

$\vec{p}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \nparallel \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \vec{p}_3 \leftarrow \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$

$\dim V(3) = 2$．

具体例 (4)—対角化

ここでさらに

$V(1) \qquad V(3) \qquad V(3)$

$$\vec{p}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix},\ \vec{p}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},\ \vec{p}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},\quad P = (\vec{p}_1\ \vec{p}_2\ \vec{p}_3)$$

と定めます．一般論によって

$$V(1) \oplus \underbrace{V(3)}$$

$= \mathrm{Ker}(A - I_3)$
$= \{\vec{v} \in \mathbb{K}^3 ; A\vec{v} = \vec{v}\}$
固有値1の固有空間.

が成立しますから，$\underbrace{c_1\vec{p}_1}_{V(1)} + \underbrace{c_2\vec{p}_2 + c_3\vec{p}_3}_{V(3)} = 0$ とすると

$$c_1\vec{p}_1 = \vec{0},\ \ c_2\vec{p}_2 + c_3\vec{p}_3 = \vec{0}$$

$\vec{p}_2 \nparallel \vec{p}_3$
$\to c_2 = c_3 = 0.$

となります．$\vec{p}_1 \neq \vec{0}$ から $c_1 = 0$ であることが分かります．

$$c_2\vec{p}_2 + c_3\vec{p}_3 = \begin{pmatrix} c_2 + c_3 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \vec{0}$$

から $c_2 = c_3 = 0$ が従います．よって P は正則となります．

$V(1) = \mathbb{k}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ —— $\dim V(1) = 1$

$V(3) = \mathbb{k}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mathbb{k}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\quad \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \nparallel \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\boxed{\dim V(3) = 2}$

$\mathbb{k}^3 \supset V(1) \oplus V(3)$

$=$

$\mathbb{k}^3 = V(1) \oplus V(3)$

$\dim = \dim V(1) + \dim V(3) = 1 + 2 = 3$

$\vec{v} = \vec{v}_1 + \vec{v}_2$

$V(1)$ $\quad f_1(\lambda) = \dfrac{\lambda - 3}{1-3} = -\dfrac{1}{2}(\lambda - 3)$

$f_1(1) = 1$

$f_1(3) = 0$

$\boxed{\vec{v}_1 = f_1(A)\vec{v}}$

$V(3)$ $\quad f_2(\lambda) = \dfrac{\lambda - 1}{3-1} = \dfrac{1}{2}(\lambda - 1)$

$f_2(3) = 1, \; f_2(1) = 0$

$\vec{v}_2 = f_2(A)\vec{v}$

$V, W \subset \mathbb{K}^n$ 部分空間.

$V + W$ が 直和

部分空間（演習）

$\iff \left(\begin{array}{l} \vec{v} \in V, \vec{w} \in W \\ \vec{v} + \vec{w} = \vec{0} \end{array} \right) \Rightarrow \vec{v} = \vec{w} = \vec{0}$

$A \in M_n(\mathbb{K}) \qquad V(\alpha) = \{ \vec{v} \in \mathbb{K}^n ; A\vec{v} = \alpha \vec{v} \}$

$= \mathrm{Ker}(A - \alpha I_n)$ 部分空間.

$\alpha, \beta \in \mathbb{K}, \ \alpha \neq \beta.$

$\Longrightarrow \quad V(\alpha) \oplus V(\beta).$

$$\vec{v}_1 \in V(\alpha), \quad \underbrace{\vec{v}_2 \in V(\beta)}$$

$$(A - \beta I_n)\vec{v}_2 = \vec{0}$$

$$\circledast \quad \vec{v}_1 + \vec{v}_2 = \vec{0}$$

$$(A - \beta I_n)\cdot \Big\downarrow$$

$$(A - \beta I_n)\vec{v}_1 = \alpha\vec{v}_1 - \beta\vec{v}_1 = (\alpha - \beta)\vec{v}_1$$

$$(\alpha - \beta)\vec{v}_1 = \vec{0}$$

$$\Big\downarrow \ \alpha \neq \beta$$

$$\vec{v}_1 = 0$$

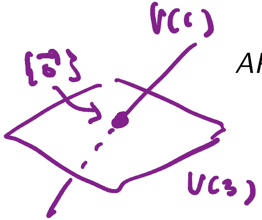
$$\Big\downarrow \ \circledast$$

$$\vec{v}_2 = \vec{0}$$

具体例 (5)—対角化

$\Phi_A(\lambda) = (\lambda-\alpha_1)(\lambda-\alpha_2)(\lambda-\alpha_3)$

$\alpha_j \in \mathbb{K}$.



$$AP = (A\vec{p}_1\ A\vec{p}_2\ A\vec{p}_3) = (1\cdot\vec{p}_1\ 3\cdot\vec{p}_2\ 3\cdot\vec{p}_3)$$
$$= (\vec{p}_1\ \vec{p}_2\ \vec{p}_3)\begin{pmatrix}1&0&0\\0&3&0\\0&0&3\end{pmatrix} = P\underbrace{\begin{pmatrix}1&0&0\\0&3&0\\0&0&3\end{pmatrix}}$$

正則.

から

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix}1&0&0\\0&3&0\\0&0&3\end{pmatrix}$$

と A が対角化されます.

$*_1$ $\alpha_i \neq \alpha_j$ $(i \neq j)$
$\Rightarrow$ 対角化 ok

$*_2$ $*_1$ でないとき.
いつ対角化できるか.

$V, W \subset \mathbb{K}^n$ とする　$\underbrace{V \oplus W}_{\substack{\cup \\ \vec{p}}}$

$$\vec{p} = \vec{v}_1 + \vec{w}_1 = \vec{v}_2 + \vec{w}_2 \qquad \left(\begin{array}{l} \vec{v}_1, \vec{v}_2 \in V \\ \vec{w}_1, \vec{w}_2 \in W \end{array} \right.$$

$$\Downarrow$$

$$\underbrace{(\vec{v}_1 - \vec{v}_2)}_{\substack{\cap \\ V}} + \underbrace{(\vec{w}_1 - \vec{w}_2)}_{\substack{\cap \\ W}} = \vec{0}$$

$$\downarrow V \oplus W$$

$$\vec{v}_1 = \vec{v}_2, \quad \vec{w}_1 = \vec{w}_2$$

V成分
W成分 が一意的に決まる.

前回の最後の定理の一般化

- $A \in M_n(\mathbf{K})$, $\alpha_1, \cdots, \alpha_\ell \in \mathbf{K}$

$\subset \mathbb{K}^n$ 部分空間.

$$V(\alpha_i) := \{\vec{v} \in \mathbf{K}^n;\ A\vec{v} = \alpha\vec{v}\} = \mathrm{Ker}\,(A - \alpha I_n)$$

- **定理** $\alpha_i \neq \alpha_j \ (i \neq j)$

$$\vec{v}_i \in V(\alpha_i) \quad (i = 1, \cdots, \ell)$$

$$\vec{v}_1 + \cdots + \vec{v}_\ell = \vec{0}$$

ならば

$V(\alpha_1) \oplus \cdots \oplus V(\alpha_\ell)$

$$\vec{v}_1 = \cdots = \vec{v}_\ell = \vec{0}$$

- 証明は ℓ の帰納法を用いる。

$\ell = 2$ は示してある.

$$\vec{v}_1 + \cdots + \vec{v}_\ell = \vec{0} \quad \text{#}$$

$$(A - \alpha_\ell I_n)\cdot \downarrow \qquad \text{注} \quad (A - \alpha_\ell I_n)\vec{v}_\ell = \vec{0}.$$

$$\underset{\substack{\in \\ V(\alpha_1)}}{\underbrace{(\alpha_1 - \alpha_\ell)\vec{v}_1}} + \underset{\substack{\in \\ V(\alpha_2)}}{(\alpha_2 - \alpha_\ell)\vec{v}_2} + \cdots + \underset{\substack{\in \\ V(\alpha_\ell)}}{(\alpha_1 - \alpha_{\ell-1})\vec{v}_\ell} = \vec{0}$$

帰納法の仮定.

$$\overbrace{(\alpha_1 - \alpha_\ell)}^{\neq 0}\vec{v}_1 = \overbrace{(\alpha_2 - \alpha_\ell)}^{\neq 0}\vec{v}_2 = \cdots = \overbrace{(\alpha_1 - \alpha_{\ell-1})}^{\neq 0}\vec{v}_{\ell-1} = \vec{0}$$

$$\rightsquigarrow \vec{v}_1 = \cdots = \vec{v}_{\ell-1} = \vec{0}. \xrightarrow[\text{#}]{} \vec{v}_\ell = \vec{0}.$$

定理 $A \in M_n(\mathbb{K})$, $\alpha_1, \cdots, \alpha_\ell \in \mathbb{K}$. $\alpha_i \neq \alpha_j \ (i \neq j)$

$\vec{v}_j \in \mathbb{K}^n$, $A\vec{v}_j = \alpha_j \vec{v}_j$, $\vec{v}_j \neq \vec{0}$

$\rightsquigarrow$ $\vec{v}_1, \cdots, \vec{v}_\ell$ は線型独立.

ℓに関する帰納法

(省略)

部分空間の和と直和

- $V_i \subset \mathbf{K}^n$ が部分空間とする $(i = 1, \cdots, \ell)$。このとき

$$V_1 + \cdots + V_\ell := \{\vec{v}_1 + \cdots + \vec{v}_\ell;\ \vec{v}_i \in V_i \quad (i = 1, \cdots, \ell)\}$$

$\in \mathbf{K}^n$

は $\mathbf{K}^n$ の部分空間である。(各自示す).

-

$$\vec{v}_i \in V_i (i = 1, \cdots, \ell), \quad \vec{v}_1 + \cdots + \vec{v}_\ell = \vec{0} \quad \Rightarrow \quad \vec{v}_1 = \cdots = \vec{v}_\ell = \vec{0}$$

が成立するとき、$V_1 + \cdots + V_\ell$ は**直和**といい

$$V_1 \oplus \cdots \oplus V_\ell$$

と記す。

$V_1, V_2 \subset \mathbb{K}^n$ 部分空間

$$\dim(V_1 \oplus V_2) = \dim \overset{\overset{m_1}{\shortparallel}}{V_1} + \dim \overset{\overset{m_2}{\shortparallel}}{V_2}.$$

V_1 の基底 $\vec{p}_1, \dots, \vec{p}_{m_1}$

V_2 〃 $\vec{q}_1, \dots, \vec{q}_{m_2}$

V_3 の基底 $\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_{m_3}$

$V_1 + V_2 \ni \vec{v} + \vec{w}$　　$\vec{v} \in V_1,\ \vec{w} \in V_2.$ とおく.

$$= \overset{\overset{\vec{v}}{\shortparallel}}{\boxed{c_1\vec{p}_1 + \cdots + c_{m_1}\vec{p}_{m_1}}} + \overset{\overset{\vec{w}}{\shortparallel}}{\boxed{c'_1\vec{q}_1 + \cdots + c'_{m_2}\vec{q}_{m_2}}} = \vec{0}$$

$\to c_1 = \cdots = c_{m_1} = 0$

$c'_1 = \cdots = c'_{m_2} = 0$

* $\vec{p}_1, \dots, \vec{p}_{m_1}, \vec{q}_1, \dots, \vec{q}_{m_2}$ LI.

* $V_1 + V_2$ は $\vec{p}_1, \dots, \vec{p}_{m_1}, \vec{q}_1, \dots, \vec{q}_{m_2}$ で生成される.

$V_1, V_2, V_3 \subset \mathbb{K}^n$ 部分空間

$$\dim(V_1 \oplus V_2 \oplus V_3) = \dim V_1 + \dim V_2 + \dim V_3.$$

各自示す.

$V_1, \cdots, V_\ell \subset \mathbb{K}^n$ ——

$$\dim(V_1 \oplus \cdots \oplus V_\ell) = \sum_{j=1}^{n} \dim V_j$$

配布. 夢のある証明を与える.

3次正方行列
三角化
C-H

はとばす.

行列の三角化

- $A \in M_3(\mathbf{K})$ の固有値が $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbf{K}$ とする。

$$\Phi_A(\lambda) = (\lambda - \alpha)(\lambda - \beta)(\lambda - \gamma)$$

- **定理** $P \in M_3(\mathbf{K})$ である正則行列 P が存在して

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \alpha & * & * \\ 0 & \beta & * \\ 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix}$$

と三角行列にできる。

証明で必要な事実（部分空間の基底）

- V が $\mathbf{K}^n$ の部分空間とする。このとき

  $$\vec{v}_1, \cdots, \vec{v}_k$$

  が線型独立ならば、これを含む V の基底

  $$\vec{v}_1, \cdots, \vec{v}_k, \ \vec{v}_{k+1}, \cdots, \vec{v}_\ell$$

  が存在する。

Cayley-Hamilton の定理

- **定理** $A \in M_3(\mathbf{K})$ に対して
$$\Phi_A(A) = O_3$$
- 一般に多項式 $f, g \in \mathbf{K}[\lambda]$ に対して
$$(f+g)(A) = f(A) + g(A), \ (f \cdot g)(A) = f(A) \cdot g(A)$$
-
$$f(P^{-1}AP) = P^{-1}f(A)P$$

固有空間分解 (1)

∈ $\mathbb{K}$.　$\Phi_A(\lambda) = (\lambda-\alpha)(\lambda-\beta)(\lambda-\gamma)$

- $A \in M_3(\mathbf{K})$ に対して、固有値 α, β, γ が単純としよう。

$$\alpha \neq \beta,\ \beta \neq \gamma,\ \gamma \neq \alpha$$

このとき

$$\mathbf{K}^3 = V(\alpha) \oplus V(\beta) \oplus V(\gamma)$$

$\forall$

- $\vec{v} \in \mathbf{K}^3$ に対して

$$\vec{v} = \vec{v}_1 + \vec{v}_2 + \vec{v}_3$$

$$\vec{v}_1 \in V(\alpha),\ \vec{v}_2 \in V(\beta),\ \vec{v}_3 \in V(\gamma)$$

〜一意的に書ける

とすると $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3$ を $\vec{v}$ で表せるか。

〜 A.

射影行列.

$$\mathbb{k}^3 \underset{=}{\supseteq} \left(V(\alpha) \oplus V(\beta) \oplus V(\gamma) \right)$$

$V \subset W$ なら

$V = W$

$\Updownarrow$

$\dim V = \dim W$

$\dim V(\alpha) \geq 1$

$\dim V(\beta) \geq 1$

$\dim V(\gamma) \geq 1.$

$$3 = \dim \mathbb{k}^3 \overset{=}{\geq} \dim V(\alpha) + \dim V(\beta) + \dim V(\gamma)$$

$$\geq 3$$

$\longrightarrow \dim V(\alpha) = \dim V(\beta) = \dim V(\gamma) = 1.$

注) 単純の固有値 α の $\dim V(\alpha) = 1.$

$$V_1 \oplus V_2 \oplus V_3 \ni \vec{v}$$

$$\vec{v} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 + \vec{p}_3 = \vec{q}_1 + \vec{q}_2 + \vec{q}_3$$

$$\vec{p}_j \in V_j \qquad \vec{q}_j \in V_j$$

$$\longrightarrow (\vec{p}_1 - \vec{q}_1) + (\vec{p}_2 - \vec{q}_2) + (\vec{p}_3 - \vec{q}_3) = \vec{0}$$

$$\xrightarrow[\oplus \ \oplus]{} \vec{p}_1 = \vec{q}_1, \ \vec{p}_2 = \vec{q}_2, \ \vec{p}_3 = \vec{q}_3.$$

固有空間分解 (2)

$A^l\vec{v} = \alpha^l\vec{v}$, $f(\lambda) = a_m\lambda^m + \cdots + a_1\lambda + a_0$

- そのアイデア (1) $f(\lambda) \in \mathbf{K}[\lambda]$, $\vec{v} \in V(\alpha)$ に対して

$$\boxed{f(A)\vec{v} = f(\alpha)\vec{v}}$$

$f(A)\vec{v} = a_mA^m\vec{v} + \cdots + a_1A\vec{v} + a_0\vec{v} = a_m\alpha^m\vec{v} + \cdots + a_1\alpha\vec{v} + a_0\vec{v} = f(\alpha)\vec{v}$

- そのアイデア (2)

2次式 $\lambda = \alpha, \beta, \gamma$.

$$\frac{(\lambda-\beta)(\lambda-\gamma)}{(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)} + \underbrace{\frac{(\lambda-\alpha)(\lambda-\gamma)}{(\beta-\alpha)(\beta-\gamma)}}_{f_2(\lambda)} + \underbrace{\frac{(\lambda-\alpha)(\lambda-\beta)}{(\gamma-\alpha)(\gamma-\beta)}}_{f_3(\lambda)} = 1 \quad Ξ$$

$f_1(\lambda) = \dfrac{(\lambda-\beta)(\lambda-\gamma)}{(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)}$ 2次式

$f_1(\alpha) = 1$, $f_1(\beta) = f_1(\gamma) = 0$

$$\vec{v} = \vec{v}_1 + \vec{v}_2 + \vec{v}_3 \qquad \vec{v}_1 \in V(\alpha),\ \vec{v}_2 \in V(\beta),\ \vec{v}_3 \in V(\gamma)$$

$$f_1(A)\vec{v} = f_1(A)\vec{v}_1 + f_1(A)\vec{v}_2 + f_1(A)\vec{v}_3$$

$$= \underbrace{f_1(\alpha)}_{\substack{\shortparallel \\ 1}}\vec{v}_1 + \underbrace{f_1(\beta)}_{\substack{\shortparallel \\ 0}}\vec{v}_2 + \underbrace{f_1(\beta)}_{\substack{\shortparallel \\ 0}}\vec{v}_3$$

$$= \vec{v}_1$$

$$\vec{v}_1 = \underbrace{f_1(A)}\vec{v}$$

射影行列.

$$\vec{v}_2 = f_2(A)\vec{v}$$

$$\vec{v}_3 = f_3(A)\vec{v}.$$

$$\boxed{f_1(A) + f_2(A) + f_3(A) = I_3.}$$

$$\underbrace{\boxed{(f_1(A) + f_2(A) + f_3(A))}}_{\vec{v}_1 + \vec{v}_2 + \vec{v}_3}\vec{v} = \vec{v}.$$

$$= \vec{v}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \qquad \Phi_A(\lambda) = (\lambda+1)(\lambda-1)(\lambda-2)$$

$$V(-1) = \mathbb{K}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad V(1) = \mathbb{K}\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad V(2) = \mathbb{K}\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbb{K}^3 = V(-1) \oplus V(1) \oplus V(2)$$

$$\vec{v} = \vec{v}_1 + \vec{v}_2 + \vec{v}_3 .$$

2て SHC分解
固有空間分解.

$V(-1)$ $\quad f_1(\lambda) = \dfrac{(\lambda-1)(\lambda-2)}{(-1-1)(-1-2)} = \dfrac{1}{6}(\lambda-1)(\lambda-2)$

$V(1)$ $\quad f_2(\lambda) = \dfrac{(\lambda+1)(\lambda-2)}{(1+1)(1-2)} = -\dfrac{1}{2}(\lambda+1)(\lambda-2)$

$V(2)$ $\quad f_3(\lambda) = \dfrac{(\lambda+1)(\lambda-1)}{(2+1)(2-1)} = \dfrac{1}{3}(\lambda+1)(\lambda-1)$