行列式の定義 (2)—行列式とその性質

戸瀬　信之

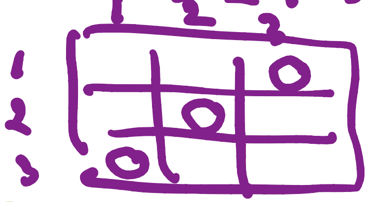
ITOSE PROJECT

SLIN2019Lec08，2019 年 09 月 27 日 at Komaba
SLIN2020Lec10，2020 年 10 月 09 日 at Komaba

全単射.

$\sigma : \{1,2,3\} \longrightarrow \{1,2,3\}$

$\varepsilon(\sigma) = -1 \longleftarrow \sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} = (13)$



$A \in M_3(\mathbb{K})$
$\cup$
(a_{ij})

$$|A| = \sum_{\sigma \in S_3} \varepsilon(\sigma)\, a_{\sigma(1)1}\, a_{\sigma(2)2}\, a_{\sigma(3)3}$$

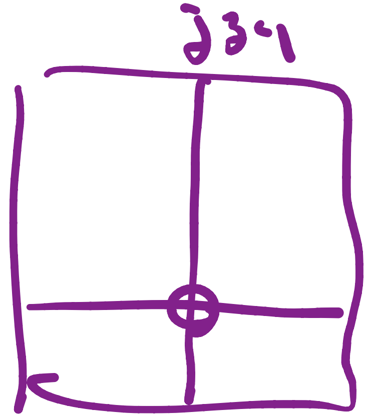
行列式の定義

i行j列.

n 次正方行列 $A=(a_{ij})\in M_n(\mathbf{K})$ の行列式を

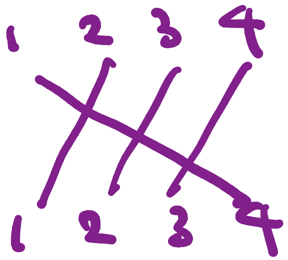
$a_{\sigma(j)j}$

$$|A| = \det(A) := \sum_{\sigma\in S_n}\varepsilon(\sigma)\cdot a_{\sigma(1)1}a_{\sigma(2)2}\cdots a_{\sigma(n)n}$$



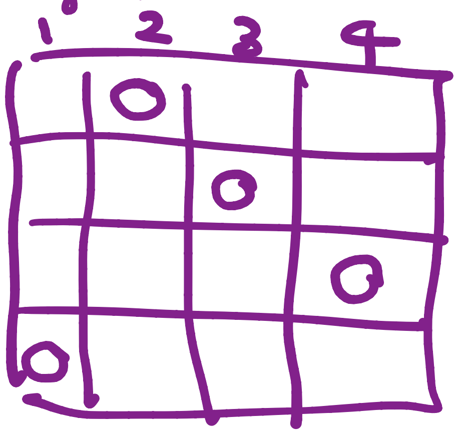
4 次正方行列の場合は

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \qquad \varepsilon(\sigma) = -1$$



$$\det(A) = \sum_{\sigma\in S_4}\varepsilon(\sigma)\cdot a_{\sigma(1)1}a_{\sigma(2)2}a_{\sigma(3)3}a_{\sigma(4)4}$$

$$\det(\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c}\ \vec{d}) = \sum_{\sigma\in S_4}\varepsilon(\sigma)\cdot a_{\sigma(1)}b_{\sigma(2)}c_{\sigma(3)}d_{\sigma(4)}$$



$\# S_4 = 24.$

$= (1\ 4\ 3\ 2) = (1\ 4)(1\ 3)(1\ 2)$

$1 \to 4 \to 3 \to 2$

転置行列の行列式 (1)

上で $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ に対応する項は $\sigma^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}$ に注意すると

$$\sigma \cdot \sigma^{-1} = \mathbb{1}.$$

$$\varepsilon(\sigma\sigma^{-1}) = \varepsilon(\mathbb{1}) = +1$$

$$= \varepsilon(\sigma)\varepsilon(\sigma^{-1})$$

$$\begin{aligned} \varepsilon(\sigma) \cdot a_{\sigma(1)1} a_{\sigma(2)2} a_{\sigma(3)3} a_{\sigma(4)4} &= -a_{41} a_{12} a_{23} a_{34} \\ &= -a_{12} a_{23} a_{34} a_{41} \\ &= \boxed{\varepsilon(\sigma^{-1})} \cdot a_{1\sigma^{-1}(1)} a_{2\sigma^{-1}(2)} a_{3\sigma^{-1}(3)} a_{4\sigma^{-1}(4)} \end{aligned}$$

$$\varepsilon(\sigma^{-1}) = \varepsilon(\sigma) = -1.$$

一般には $\sigma \in S_n$ と $A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbf{K})$ に対して

$$\rightarrow \quad \varepsilon(\sigma) \cdot a_{\sigma(1)1} \cdot a_{\sigma(2)2} \cdots a_{\sigma(n)n} = \varepsilon(\sigma^{-1}) \cdot a_{1\sigma^{-1}(1)} \cdot a_{2\sigma^{-1}(2)} \cdots a_{n\sigma^{-1}(n)}$$

さらに写像

$$S_n \to S_n \quad \sigma \mapsto \sigma^{-1}$$

全単射.

は全単射であることを用いて

Ω 有限 $\Omega \xrightarrow{f} \mathbb{K}$.

$\rightarrow \sum_{\Omega} f(\omega) = \sum_{\Omega} f(\varphi(\omega))$

$\Omega \xrightarrow{\varphi} \Omega$ 全単射

転置行列の行列式 (2)

$$\det(A) = \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma^{-1}) \cdot a_{1\sigma^{-1}(1)} \cdot a_{2\sigma^{-1}(2)} \cdots a_{n\sigma^{-1}(n)}$$

$$= \sum_{\tau \in S_n} \varepsilon(\tau) \cdot a_{1\tau(1)} \cdot a_{2\tau(2)} \cdots a_{n\tau(n)}$$

$\tau = \sigma^{-1}.$

$\sigma^{-1}(i) = \tau(i).$

これから $n = 4$ のとき

$A = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix}$

$$\begin{vmatrix} \mathbf{a} \\ \mathbf{b} \\ \mathbf{c} \\ \mathbf{d} \end{vmatrix} = \sum_{\underset{\tau}{\sigma \in S_4}} \varepsilon(\underset{\tau}{\sigma}) \cdot a_{\underset{\tau}{\sigma}(1)} b_{\underset{\tau}{\sigma}(2)} c_{\underset{\tau}{\sigma}(3)} d_{\underset{\tau}{\sigma}(4)} = \begin{vmatrix} \vec{a} & \vec{b} & \vec{c} & \vec{d} \end{vmatrix}$$

$$
\overset{{}^tA}{\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\ c_1 & c_2 & c_3 & c_4 \\ d_1 & d_2 & d_3 & d_4 \end{vmatrix}} = \overset{A}{\overset{\shortparallel}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix}}}
$$

$$
|{}^tA| = |A|
$$

転置行列の行列式 (3)

一般的には $A \in M_n(\mathbf{K})$ に対して

$$\det({}^tA) = \det(A)$$