行列式の定義 (2)—置換の符号

戸瀬　信之

ITOSE PROJECT

SLIN2019Lec08, 2019 年 09 月 27 日 at Komaba
SLIN2020Lec09, 2020 年 10 月 2 日 at Komaba

$A = (a_{ij})$ 3次正方行列

$\nwarrow$ i行j列

$\sigma : \{1, 2, 3\} \longrightarrow \{1, 2, 3\}$ 全単射 $\longleftrightarrow$ σ 置換

$\sigma \in S_3$. $\# S_3 = 6$.

$\begin{cases} \text{偶} & \varepsilon(\sigma) = 1 \\ \text{奇} & \varepsilon(\sigma) = -1. \end{cases}$

$$|A| = \sum_{\sigma \in S_3} \underbrace{\varepsilon(\sigma)}_{\uparrow} \cdot a_{\sigma(1)1}\, a_{\sigma(2)2}\, a_{\sigma(3)3}.$$

σの符号.

反転数 (1)

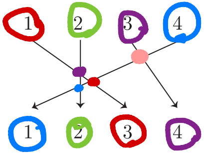
定義　n 次の置換 $\sigma \in S_n$ と $1 \le i < j \le n$ を満たす (i, j) に対して

$$\sigma(i) > \sigma(j)$$

が成立するとき，(i, j) は σ で反転されると言います．

$i<j \Rightarrow \sigma(i) < \sigma(j)$

定義 $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 4 & 1 \end{pmatrix} \in S_4$ に対して



$\varepsilon(\sigma) = (-1)^4$
$= 1$

$\boxed{\sigma(1) = 3 > 2 = \sigma(2)}$　$\boxed{\sigma(1) = 3 > 1 = \sigma(4)}$
$\boxed{\sigma(2) = 2 > 1 = \sigma(4)}$　$\boxed{\sigma(3) = 4 > 1 = \sigma(4)}$

(交点数)
σ の反転数 $= 4$

から $(1, 2)$, $(1, 4)$, $(2, 4)$, $(3, 4)$ が σ によって反転されます．

反転数 (2)

([illegible])

定義 $\sigma \in S_n$ に対して反転される (i, j) の個数を<u>反転数</u>と呼びます．反転数が偶数の場合 σ を<u>偶置換</u>，反転数が奇数の場合 σ を<u>奇置換</u>と呼びます．さらに σ の符号を

$$\varepsilon(\sigma) = \begin{cases} 1 & (\sigma\text{が偶置換}) \\ -1 & (\sigma\text{が奇置換}) \end{cases}$$

簡単に計算できる.

と定義します．

反転数 (3)–S_3 の場合 (1)

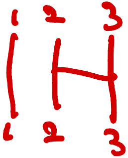
隣接

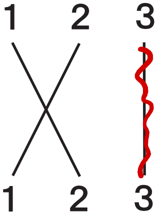
$(2\ 3) \leftarrow$ 互換 $\rightarrow (1\ 2)$ $\qquad (1\ 3) = (1\ 2)(2\ 3)(1\ 2)$

$\|$ $\qquad \|$ $\qquad \|$

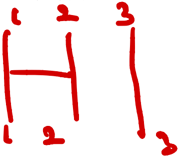
$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ $\qquad \sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ $\qquad \sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ ← 奇置換.

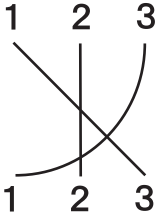
反転数 $= 1$



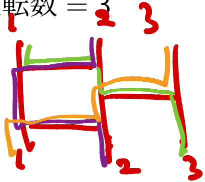


反転数 $= 1$





反転数 $= 3$



$\sigma = \sigma_1 \cdots \sigma_\ell$

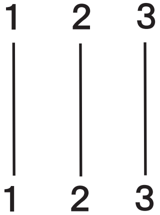
σ_j : 互換

$\Rightarrow \ell$ 奇数.

反転数 (4)–S_3 の場合 (2)

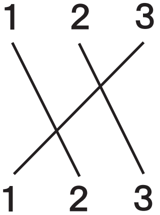
$(12)(23) \neq (23)(12)$

$\mathbf{1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

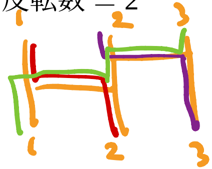


反転数 $= 0$

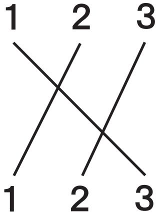
$(12)(23) = \sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$



反転数 $= 2$



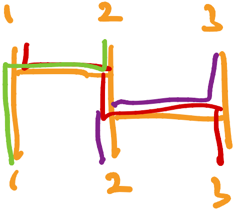
$(23)(12) = \sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$



反転数 $= 2$

偶置換.

$\sigma = \sigma_1 \cdots \sigma_\ell$
$\sigma_1, \cdots, \sigma_\ell$ 互換
$\Rightarrow \ell$: 偶数



総和と積の記号 (1)

有限集合 $\Omega = \{\omega_1, \ldots, \omega_n\}$ とその上の関数

$$f: \ \Omega \to \mathbf{K}$$

$\omega_j \mapsto f(\omega_j)$

に対して

$$\sum_{\omega \in \Omega} f(\omega) = f(\omega_1) + \ldots + f(\omega_n)$$

$$\prod_{\omega \in \Omega} f(\omega) = f(\omega_1) \cdots f(\omega_n)$$

1, ---, n の添字付けによらない

を定義します.

2 点集合

$\{1, 2\} = \{2, 1\}$

$\{1, 2, \ldots, n\}$ の2 点集合全体の集合

$$\Omega_n := \{\{i, j\};\ i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}, i \neq j\}$$

$\# \Omega_n = {}_nC_2$

$= \frac{n(n-1)}{2}$.

を定義します．具体的には

$$\Omega_3 := \{\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}\}$$

$$\Omega_4 := \{\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{1, 4\}, \{2, 3\}, \{2, 4\}, \{3, 4\}\}$$

$\# \Omega_2 = 6$.

$\Omega_5 := \ldots$

2点集合による符号 (1)

$\sigma \in S_n$ に対して

$$\tilde{\varepsilon}(\sigma) := \prod_{\{i,j\}\in\Omega_n,\, i<j} \frac{\sigma(i)-\sigma(j)}{i-j} = \frac{\sigma(j)-\sigma(i)}{j-i}$$

例えば $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$ のときは

$$\begin{aligned}
\tilde{\varepsilon}(\sigma) &= \frac{3-2}{1-2}\cdot\frac{\boxed{3-4}}{1-3}\cdot\frac{3-1}{1-4}\cdot\frac{2-4}{2-3}\cdot\frac{2-1}{2-4}\cdot\frac{4-1}{\boxed{3-4}} \\
&= (-1)\frac{\cancel{2-3}}{1-2}\cdot\frac{3-4}{1-3}\cdot(-1)\frac{1-3}{1-4}\cdot\frac{2-4}{\cancel{2-3}}\cdot(-1)\frac{1-2}{2-4}\cdot(-1)\frac{1-4}{3-4} \\
&= (-1)^4 = +1
\end{aligned}$$

定義できる OK. → $\Omega_4 \xrightarrow{\sigma^\#} \Omega_4$ 全単射

well-defined $\{i,j\} \longmapsto \{\sigma(i), \sigma(j)\}$

2 点集合による符号 (2)

σ : 単射.

- $\{i,j\} \in \Omega_n$ のとき $i \neq j$ から $\sigma(i) \neq \sigma(j)$, 従って $\{\sigma(i),\sigma(j)\} \in \Omega_n$
- $\sigma^{\#}: \ \Omega_n \to \Omega_n \ \{i,j\} \mapsto \{\sigma(i),\sigma(j)\}$ は全単射
- $\tilde{\varepsilon}(\sigma) = \pm 1$
- $\tilde{\varepsilon}(\sigma) = \varepsilon(\sigma)$

置換の積

問題 $\varepsilon(\tau\sigma) = ?$

$\sigma, \tau \in S_n$ は全単射

$$\sigma : \{1,2,\cdots,n\} \to \{1,2,\cdots,n\}, \quad \tau : \{1,2,\cdots,n\} \to \{1,2,\cdots,n\}$$

全単射　全単射.

で，その合成

$$\tau \circ \sigma : \{1,2,\cdots,n\} \to \{1,2,\cdots,n\} \quad i \mapsto \tau(\sigma(i))$$

全単射.

も全単射で

$$\tau \circ \sigma \in S_n$$

これを $\tau\sigma \in S_n$ と記します.

積.

$\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3 \in S_n$

$(\sigma_1\sigma_2)\sigma_3 = \sigma_1(\sigma_2\sigma_3)$

結合則を満たす.

$X \xrightarrow{f} Y$ 全射 単射

$Y \xrightarrow{g} Z$:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[rr, bend right, "g \circ f"'] & Y \arrow[r, "g"] & Z \end{tikzcd}$$

$\Longrightarrow$ $g \circ f$ も 全射
単射.

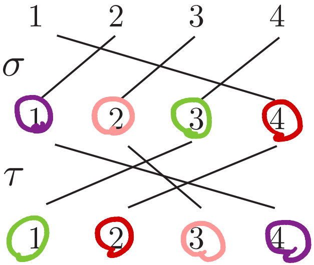
演習

例

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad \tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

のとき

$$\tau\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$



結合法則 $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3 \in S_n$ に対して

$$(\sigma_1\sigma_2)\,\sigma_3 = \sigma_1\,(\sigma_2\sigma_3)$$

置換の逆

$\sigma \in S_n$ は全単射

$$\sigma : \{1, 2, \dots, n\} \to \{1, 2, \dots, n\}$$

ですから，その逆写像

$$\sigma^{-1} : \{1, 2, \dots, n\} \to \{1, 2, \dots, n\}$$

も全単射で，$\sigma^{-1} \in S_n$ であることが分かります．このとき

$$\sigma\sigma^{-1} = \sigma^{-1}\sigma = \mathbf{1}$$

が成立します．

$X \xrightarrow{f} Y \qquad Y \xrightarrow{g} X$

$g \circ f : X \to X$

$f \circ g : Y \to Y$

gがfの逆写像 $\Leftrightarrow$ $g \circ f = id_X$ かつ $f \circ g = id_Y$.

一意性 $g = f^{-1}$.

$\boxed{f\text{が全単射} \Leftrightarrow f\text{は逆が存在する}}$

総和と積の記号 (2)

$\#\Omega = n$

(I) 有限集合 Ω と写像

$$f : \Omega \to \mathbf{K}, \quad g : \Omega \to \mathbf{K}$$

Ω上の関数.

があるとき

$\{\omega_1, \ldots, \omega_n\}$

$$\prod_{\omega\in\Omega} f(\omega)g(\omega) = \left(\prod_{\omega\in\Omega} f(\omega)\right)\cdot\left(\prod_{\omega\in\Omega} g(\omega)\right)$$

$$\boxed{\begin{aligned}&\sum (f+g)(\omega)\\ &= \sum f(\omega) + \sum g(\omega)\end{aligned}}$$

左 $= (f(\omega_1)g(\omega_1)) \cdots (f(\omega_n)g(\omega_n))$

$= f(\omega_1)\cdots f(\omega_n) \cdot g(\omega_1)\cdots g(\omega_n)$

$=$ 右

(II) 全単射 $\varphi : \Omega \to \Omega$ があるとき

$$\prod_{\omega\in\Omega} f(\varphi(\omega)) = \prod_{\omega\in\Omega} f(\omega)$$

$f \circ \varphi(\omega)$

$$\sum_{\omega\in\Omega} f(\omega) = \sum_{\omega\in\Omega} f(\varphi(\omega))$$

定理 $\sigma, \sigma' \in S_n$ に対して

$$\varepsilon(\sigma\sigma') = \varepsilon(\sigma)\varepsilon(\sigma')$$

$$\Omega_n \xrightarrow{\sigma'^{\#}} \Omega$$

$$\{i,j\} \longmapsto \{\sigma'(i), \sigma'(j)\}$$

$$
\begin{aligned}
(\text{T}_2) = \varepsilon(\sigma\sigma') &= \prod_{\{i,j\}, i<j} \frac{(\sigma\sigma')(i) - (\sigma\sigma')(j)}{i-j} \\
&= \prod_{\{i,j\}, i<j} \frac{\sigma(\sigma'(i)) - \sigma(\sigma'(j))}{\sigma'(i) - \sigma'(j)} \cdot \frac{\sigma'(i) - \sigma'(j)}{i-j} \\
&= \prod_{\{i,j\}, i<j} \frac{\sigma(\sigma'(i)) - \sigma(\sigma'(j))}{\sigma'(i) - \sigma'(j)} \cdot \prod_{\{i,j\}, i<j} \frac{\sigma'(i) - \sigma'(j)}{i-j} \\
&= \prod_{\{k,\ell\}, \cancel{k<\ell}} \frac{\sigma(k) - \sigma(\ell)}{k-\ell} \cdot \prod_{\{i,j\}, i<j} \frac{\sigma'(i) - \sigma'(j)}{i-j} = \varepsilon(\sigma) \cdot \varepsilon(\sigma')
\end{aligned}
$$

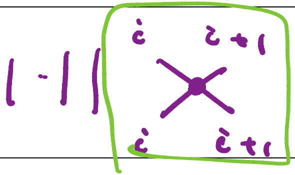
$$/\!/ \quad \varepsilon(\sigma')$$

互換の符号 (1)

$k<\ell$ 　 $\tau(k)=\ell$, $\tau(\ell)=k$ 　 $j \neq k,\ j \neq \ell \Rightarrow \tau(j)=j$

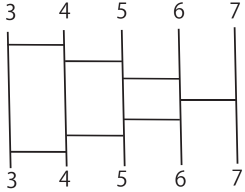
定理 互換 $\tau = (k\ \ell) \in S_n$ に対して

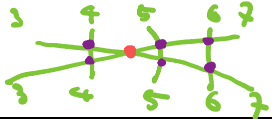
$$\varepsilon(\tau) = -1$$



- 隣接互換 $\tau = (i\ i+1)$ に対して $\varepsilon(\tau) = -1$
- $i < j$ のとき

$$(i\ j) = (i\ i+1)(i+1\ i+2)\cdots(j-2\ j-1)$$
$$(j-1\ j)(j-2\ j-1)\cdots(i+1\ i+1)(i\ i+1)$$





$\varepsilon((3\ 7)) = (-1)^7 = -1.$

互換の符号 (2)

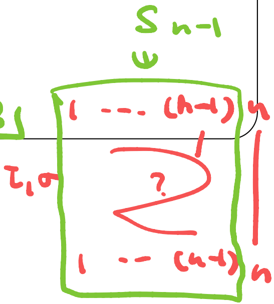
隣接互換.

定理　$\sigma \in S_n$ は有限個の互換 $\tau_1, \cdots, \tau_\ell$ の積（合成）として

$$\sigma = \tau_1 \cdots \tau_\ell$$

と表せます.

任意の置換はアミダで表現できる



証明は n に関する帰納法によります.

$\sigma(n) = i_0$ のとき $\tau_1 = (i_0\ n)$ とします．このとき

$n \neq i_0$

$$\tau_1\sigma(n) = n \quad \text{なので} \quad \tau_1\sigma \in S_{n-1}$$

$= \tau_1(i_0) = n$

従って

$$\tau_1\sigma = \tau_2 \cdots \tau_\ell$$

を満たす互換 $\tau_2, \ldots, \tau_\ell \in S_{n-1}$ が存在します．$\tau_1^2 = \mathbf{1}$ なので

互換 τ

$\tau^2 = \mathbb{1}$

τ_1

$$\sigma = \tau_1\tau_2 \cdots \tau_\ell$$

$\tau_1^2\sigma = \mathbb{1}\sigma = \sigma$

互換の符号 (2)

定理 $\sigma \in S_n$ が互換の積として

$$\sigma = \tau_1 \cdots \tau_\ell = \tau'_1 \cdots \tau'_{\ell'}$$

と 2 通りに表現されているとします．このとき ℓ と ℓ' の偶奇は一致します．

$$\varepsilon(\sigma) = (-1)^{\ell} = (-1)^{\ell'}$$

$$\longrightarrow \ \ell \equiv \ell' \pmod{2}$$

巡回置換

$k_1, \cdots, k_r \in \{1, 2, \cdots, n\}$ はお互いに異なるとします.

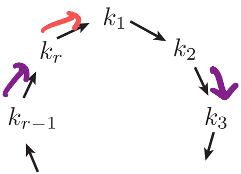
$$\sigma(k_1) = k_2,\ \sigma(k_2) = k_{\cancel{2}}, \ldots, \sigma(k_{r-1}) = k_r,\ \sigma(k_r) = k_1$$

3

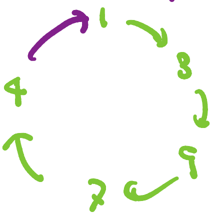
と

$$\sigma(i) = i \quad (i \notin \{k_1, k_2, \ldots, k_r\})$$

で定義される置換を $\sigma = (k_1\ \cdots\ k_r)$ と記します（巡回置換）.



$\sigma = (1\ 3\ 9\ 7\ 4) \in S_9$



$\sigma(2) = 2$

$\sigma(5) = 5$

巡回置換 (2)

定理任意の $\sigma \in S_n$ は巡回置換の積で表せます.

ところ, $\{\sigma^i(1) ; i=1,2,\dots\}$

演習

まじめに証明してみる.

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 3 & 6 & 9 & 1 & 2 & 5 & 4 & 8 & 7 \end{pmatrix}$$

$\{1, 2, \dots, n\}$ 有限集合

を考えます．1 から始めて σ で動かしていくと,

$$1 \xrightarrow{\sigma} 3 \xrightarrow{\sigma} 9 \xrightarrow{\sigma} 7 \xrightarrow{\sigma} 4 \xrightarrow{\sigma} 1$$

$(1\ 3\ 9\ 7\ 4\ 1)$

と 1 に戻ります．さらにここに現れていない数 2, 5, 6, 8 のうちで最小である 2 から始めて，σ で動かしていくと

$$2 \xrightarrow{\sigma} 6 \xrightarrow{\sigma} 5 \xrightarrow{\sigma} 2$$

$(2\ 6\ 5)$

と 2 に戻ります．今まで現れていない 8 は $8 \xrightarrow{\sigma} 8$ とそれ自身に写ります．このことから

$$\sigma = (1\ 3\ 9\ 7\ 4)(2\ 6\ 5) = (2\ 6\ 5)(1\ 3\ 9\ 7\ 4)$$

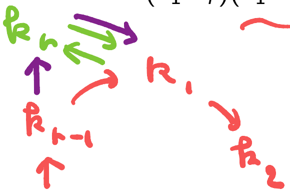
巡回置換 (3)

巡回置換は互換の積で表せます. 実際, $k_1, \cdots, k_r \in \{1, 2 \cdots, n\}$ がお互いに異なるとするとき

$$(k_1\ k_2\ \cdots\ k_r) = (k_1\ k_r)(k_1\ k_{r-1}) \cdots (k_1\ k_2)$$

が成立します. これは次から分かります.

$$(k_1\ k_r)\underbrace{(k_1\ k_2\ \cdots\ k_{r-1})} = (k_1\ k_2\ \cdots\ k_{r-1}\ k_r)$$



$$\boxed{\begin{aligned} &(1\ 3\ 9\ 7\ 4) \\ &= (1\ 4)(1\ 7)(1\ 9)(1\ 3) \end{aligned}}$$