写像—単射・全射・全単射・逆写像

戸瀬　信之

ITOSE PROJECT

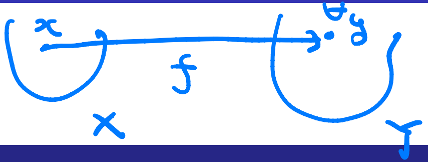
V01 Sep 25, 2020 for SLIN2020 L08

$A = (\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c})$

$|A| = \sum \underbrace{\varepsilon(\sigma)} a_{\sigma_1} b_{\sigma_2} c_{\sigma_3}$

$\sigma = (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) \leftarrow$ 1, 2, 3 の順列.

全射 (1)



集合 X, Y と写像 $f\colon X \to Y$ について考えます.

Definition

$$f(X) = Y$$

$= \{f(x) \in Y ; x \in X\}$

が成立するとき，すなわち

$$\forall y \in Y \text{ に対して} \exists x \in X \text{が存在して} f(x) = y$$

が成立するとき，f は**全射**であるといいます.

全射 (2)

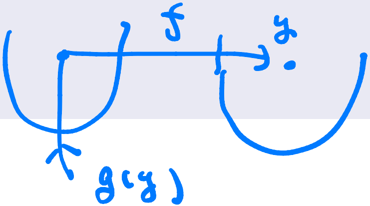
$$\begin{tikzcd} Y \arrow[r, "g"'] \arrow[rr, bend left, "f\circ g"] & X \arrow[r, "f"'] & Y \end{tikzcd}$$

Theorem

$g: \ Y \to X$ が存在して

$$f \circ g = id_Y$$

を満たせば，f は全射となります．



証明　任意の $y \in Y$ に対して

$$\begin{array}{c} id_Y(y) \\ \| \\ y \end{array} = f(g(y))$$

が成立しますから，f が全射であることが分かります．

単射 (1)

集合 X, Y と写像 $f: X \to Y$ について考えます.

Definition

任意の $x, x' \in X$ に対して

$$\boxed{f(x) = f(x') \quad \Rightarrow \quad x = x'}$$

が成立するとき f は単射であるといいます.

$$\equiv \left(x \neq x' \Rightarrow f(x) \neq f(x') \right)$$

単射 (2)・全単射

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[rr, bend left, "g\circ f"] & Y \arrow[r, "g"] & X \end{tikzcd}$$

Theorem

ある写像 $g: Y \to X$ が

$$g \circ f = id_X$$

を満たせば，f は単射となります.

Definition

f が全射でかつ単射であるとき**全単射**であるといいます.

$x, x' \in X \quad f(x) = f(x')$

$\rightsquigarrow g(f(x)) = g(f(x')) \rightsquigarrow x = x'$

逆写像 (1)

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"'] & Y \arrow[l, bend right, "g"'] \end{tikzcd}$$

Definition

写像 $f: X \to Y$ に対して

$$g \circ f = id_X, \quad f \circ g = id_Y \tag{1}$$

→ f : 全単射

を満たす g を f の**逆写像**と呼びます.

f : 単射　　f : 全射

逆写像 (2)

逆写像は存在すれば一意的に定まります．すなわち 2 つの写像

$$g_1 :\ Y \to X, \quad g_2 :\ Y \to X \quad \xrightarrow{id_X} X$$

が

$$g_1 \circ f = id_X,\ f \circ g_1 = id_Y,\ g_2 \circ f = id_X,\ f \circ g_2 = id_Y$$

を満たすならば $g_1 = g_2$ が成立します．実際 結合則.

$$g_2 = id_X \circ g_2 = (g_1 \circ f) \circ g_2 = g_1 \circ (f \circ g_2) = g_1 \circ id_Y = g_1$$

からこのことは証明できます．この一意性から f の逆写像を

$$f^{-1} :\ Y \to X$$

と記します．

逆写像 (3)

Theorem

$f : X \to Y$ に逆写像 $g : \ Y \to X$ が存在すれば f は全単射であることが従います.

逆写像 (4)

Theorem

写像 $f: X \to Y$ が全単射ならば，f には逆写像が存在します．

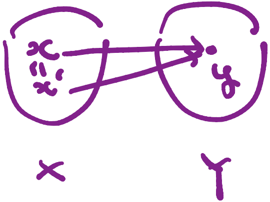
証明 逆写像 $g: Y \to X$ を構成します．f は全射ですから任意の $y \in Y$ に対して

$$y = f(x)$$

を満たす $x \in X$ が存在します．しかもこの条件を満たす $x \in X$ はただ一つ存在します．実際 f は単射ですから

$$f(x) = f(x') \quad から \quad x = x'$$

が従うからです．



逆写像 (5)

一意的　$f(x) = y.$

この状況で

$$g(y) := x$$

と定義します．これから

$$y = f(g(y))$$

$= f(x) = y.$

$f \circ g = \mathrm{id}_Y.$

が成立することが分かります．さらに任意の $x \in X$ に対して $y = f(x)$ と定めると g の定義から $g(y) = x$ となりますが

$y = f(x)$

$$g(f(x)) = x$$

が従います．

$\mathrm{id}_X = g \circ f.$

$g = f^{-1}.$

$(h\circ g)\circ f$

$$
\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "f"] \arrow[rr, bend right, "g\circ f"'] \arrow[rrr, bend right=50, "h\circ(g\circ f)"'] & Y \arrow[r, "g"] \arrow[rr, bend left, "h\circ g"] & Z \arrow[r, "h"] & W
\end{tikzcd}
$$

$h\circ(g\circ f) = (h\circ g)\circ f$ ← 証明方法

$\forall x\in X$ を代入

結合則

両辺とも $h(g(f(x)))$ になる.