行列式の定義 (1)—3 次の場合に復習と拡張

再構築

戸瀬　信之

ITOSE PROJECT

SLIN2019Lec08，2019 年 09 月 27 日 at Komaba
SLIN2020Lec08，2020 年 09 月 25 日 at Komaba

3 次行列式（復習）

$\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in M_3(\mathbf{K})$ に対して

$$= \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

$$|\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c}| := \sum_{(i\ j\ k) \in S_3} \varepsilon(i\ j\ k) \cdot a_i b_j c_k$$

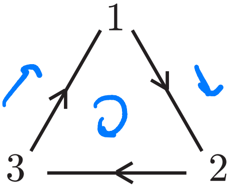
$3! = 6.$

ここで $(i\ j\ k) \in S_3$ は $1, 2, 3$ を並べた順列全体を動きます．また

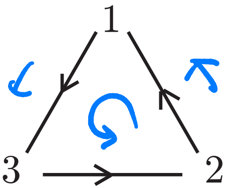
$$\varepsilon(i\ j\ k) = \begin{cases} 1 & (i\ j\ k)\text{が正の向き} \\ -1 & (i\ j\ k)\text{が負の向き} \end{cases}$$

と順列の符号を定めます．

順列の偶奇



正の向き



負の向き

$(2\ 3\ 1)$ 正の向き

$\varepsilon(2\ 3\ 1) = 1$

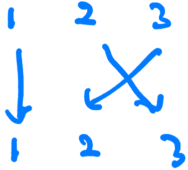
$(2\ 1\ 3)$ 負の向き

$\varepsilon(2\ 1\ 3) = -1$

順列とその符号を言い換える (1)

例えば負の向きの順列 (1 3 2) は全単射

$$\sigma:\ \{1,2,3\} \to \{1,2,3\}$$

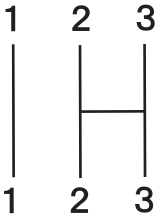


で

$$\sigma(1)=1,\ \sigma(2)=3,\ \sigma(3)=2$$

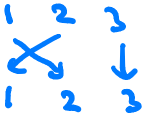
であるものと考えます（**置換**と呼びます）．そして

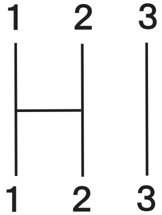
$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$



と表します．これは 2 と 3 を交換する**互換**と呼ばれ (2 3) と表します.

順列とその符号を言い換える (2)—負の向きの順列



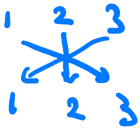


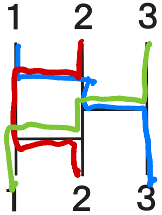
$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ の場合，2 と 1 を交換する互換で (1 2) と表します.

$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ の場合，1 と 3 を交換する互換で $(1\ \overset{3}{\cancel{2}})$ と表します．あみだで表すと

$$(1\ 3) = (2\ 3) \circ (1\ 2) \circ (2\ 3)$$

とから右図となります.





あみだの線＝隣接互換．(1 2), (2 3)

順列とその符号を言い換える (3)—正の向きの順列

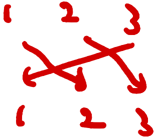
$\sigma = \left(\begin{smallmatrix}1&2&3\\1&2&3\end{smallmatrix}\right)$ の場合，$\{1,2,3\}$ の上の恒等写像で $\mathbf{1}$ と表します.

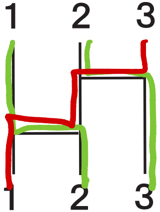
0 個.

$\sigma = \left(\begin{smallmatrix}1&2&3\\2&3&1\end{smallmatrix}\right)$ の場合，

$$\sigma = (1\ 2) \circ (2\ 3)$$

と 2 個の互換の合成で表されます.



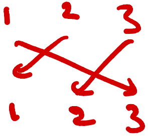


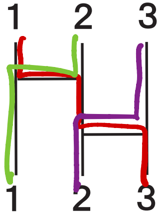
順列とその符号を言い換える (4)—正の向きの順列

$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ の場合,

$$\sigma = (2\ 3) \circ (1\ 2)$$

と 2 個の互換の合成で表されます.





(1 2), (2 3), (1 3)

定理 $\sigma \in S_3$ とします．互換 $\sigma_1, \ldots, \sigma_\ell$, $\tau_1, \ldots, \tau_{\ell'}$ に対して

$$\sigma = \sigma_\ell \circ \cdots \circ \sigma_1 = \tau_{\ell'} \circ \cdots \circ \tau_1$$

が成立するならば

$$\ell \equiv \ell' \pmod 2$$

証明は 3 次の場合を含む一般の場合に与えます.

応用—固有多項式 (1)

i 行 j 列

$$= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

3 次正方行列 $A = (a_{ij}) \in M_3(\mathbf{K})$ に対して固有多項式

$$\Phi_A(\lambda) := \det(\lambda I_3 - A)$$

を考えます．$B(\lambda) := (b_{ij}(\lambda)) = \lambda I_3 - B$ とおきます．このとき

$$\Phi_A(\lambda) = \sum_{\sigma \in S_3} \varepsilon(\sigma) b_{\sigma(1)1}(\lambda) b_{2\sigma(2)2}(\lambda) b_{\sigma(3)3}(\lambda)$$

$3! = 6.$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

となります．この右辺の和の項について $\sigma \in S_3$ が $\sigma \neq \mathbf{1}$ ならば

$$\operatorname{ord}\left(b_{\sigma(1)1}(\lambda) b_{\sigma(2)2}(\lambda) b_{\sigma(3)3}(\lambda)\right) \leq 1$$

$\exists i$ $\sigma = \mathbf{1}$

$\sigma(1)=1,\ \sigma(2)=2,\ \sigma(3)=3.$

$\sigma \neq \mathbf{1}$ のとき

$$j := \sigma(i) \neq i \quad \text{ならば} \quad \sigma(j) \neq \sigma(i) = j$$

σ: 単射

であるから である．例えば

$$\sigma(1) = 2 \neq 1 \quad \text{ならば} \quad \sigma(2) \neq 2$$

$j \backslash i$	1	2	3
1		*	
2	*	$\boxed{}$	
3		*	

実際

$$\sigma(2) = 1 \text{ または } 3$$

$b_{\sigma(1)1}$, $b_{\sigma(2)2}$

↑ は　↑ は.

$\sigma = \mathbf{1}$ のとき

$$\begin{aligned} b_{\sigma(1)1}(\lambda) b_{\sigma(2)2}(\lambda) b_{\sigma(3)3}(\lambda) &= b_{11}(\lambda) b_{22}(\lambda) b_{33}(\lambda) \\ &= (\lambda - a_{11})(\lambda - a_{22})(\lambda - a_{33}) \end{aligned}$$

$$\mathrm{tr}(A) = a_{11} + a_{22} + a_{33}$$

定理 3 次正方行列 $A = (a_{ij}) = (\vec{a}_1\ \vec{a}_2\ \vec{a}_3) \in M_3(\mathbf{K})$ に対して

$$\Phi_A(\lambda) = \lambda^3 - \underline{(a_{11} + a_{22} + a_{33})}\lambda^2 + *\lambda - \det(A)$$

演習

定数項については

$$\Phi_A(0) = |-\vec{a}_1\ \ -\vec{a}_2\ \ -\vec{a}_3| = -|\vec{a}_1\ \vec{a}_2\ \vec{a}_3| = -\det(A)$$

$$\Phi_A(\lambda) = \underbrace{\sum_{\sigma \neq 1} \varepsilon(\sigma)\, e_{\sigma(1)1}\, e_{\sigma(2)2}\, e_{\sigma(3)3}}_{1\text{次以下.}} + (\lambda - a_{11})(\lambda - a_{22})(\lambda - a_{33})$$

$$\Phi_A(\lambda) = \left| \lambda\vec{e}_1 - \vec{a}_1 \quad \lambda\vec{e}_2 - \vec{a}_2 \quad \lambda\vec{e}_3 - \vec{a}_3 \right|$$