具体例 (1)

$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ を対角化します．(SLIN2020L08 確認問題 V(2))

$$\lambda I_3 - A = \begin{pmatrix} \lambda & & \\ & \lambda & \\ & & \lambda \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\Phi_A(\lambda) = |\lambda I_3 - A|$$

$$= \begin{pmatrix} \lambda-1 & -1 & 2 \\ 1 & \lambda-2 & -1 \\ 0 & -1 & \lambda+1 \end{pmatrix}$$

具体例 (2)—固有多項式

$|\lambda I_3 - A|$

$1r \mathrel{+}= 3r \times (-1)$

$(-2\ \ 0\ \ 2) \to (1\ \ 0\ \ -1)$

$(0\ \ 0\ \ 0)$

$-\frac{1}{2}$倍 $(1\ \ 0\ \ -1)$

$= (\lambda-1)(1\ \ 0\ \ -1)$

$$\Phi_A(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda-1 & -1 & 2 \\ 1 & \lambda-2 & -1 \\ 0 & -1 & \lambda+1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda-1 & 0 & 1-\lambda \\ 1 & \lambda-2 & -1 \\ 0 & -1 & \lambda+1 \end{vmatrix} = (\lambda-1)\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & \lambda-2 & -1 \\ 0 & -1 & \lambda+1 \end{vmatrix}$$

$$= (\lambda-1)\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & \lambda-2 & 0 \\ 0 & -1 & \lambda+1 \end{vmatrix} = (\lambda-1)\begin{vmatrix} \lambda-2 & 0 \\ -1 & \lambda+1 \end{vmatrix} = (\lambda+1)(\lambda-1)(\lambda-2)$$

から A の固有値は $\lambda = -1, 1, 2$ であることが分かります.

余因子展開

$\lambda = 2$を代入

具体例 (3)—固有ベクトル

(i) $\lambda = -1$ のとき行列式の計算における行基本変形を用いると

$$(-I_3 - A)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \vec{0} \Leftrightarrow A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \vec{0} \qquad (\#1)$$

であることが分かります．さらに

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \to \cdots \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

と行基本変形できますから

$$(\#1) \Leftrightarrow x = z,\ y = 0$$

$A\vec{P_1} = \vec{P_1}$

となります．これから固有ベクトルは

$\vec{P_1}$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z \\ 0 \\ z \end{pmatrix} = z\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (z \neq 0)$$

であることが分かります.

具体例 (4)—固有ベクトル

(ii) $\underline{\lambda = 1}$ のとき 上の行列式の計算の行基本変形を用いて

$$A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \vec{0} \qquad (\#2)$$

において

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \to \cdots \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

1r + 2 2r

と行基本変形できますから

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$(\#2) \Leftrightarrow \boxed{x - 3z = 0}, \quad y - 2z = 0$$

となります．これから固有ベクトルは

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3z \\ 2z \\ z \end{pmatrix} = z\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (z \neq 0)$$

$= \vec{p}_2$ $\qquad A\vec{p}_2 = \vec{p}_2$

であることが分かります.

具体例 (5)—固有ベクトル

(iii) $\underline{\lambda = 2 \text{ のとき}}$ 固有多項式を求めるために用いた行基本変形を用いると

$$A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \vec{0} \qquad (\#3)$$

において

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix} \to \cdots \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

と行基本変形できますから

$$(\#1) \Leftrightarrow x = z,\ y = 3z$$

$A\vec{p}_3 = 2\vec{p}_3$

となります．これから固有ベクトルは

$= \vec{p}_3$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z \\ 3z \\ z \end{pmatrix} = z\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (z \neq 0)$$

であることが分かります．

具体例 (6)—対角化

ここでさらに

$$\vec{p}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \ \vec{p}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \ \vec{p}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad P = (\vec{p}_1 \ \vec{p}_2 \ \vec{p}_3)$$

とすれば，相異なる固有値の固有ベクトルは線型独立ですから，P は正則となります．このとき

$$AP = (A\vec{p}_1 \ A\vec{p}_2 \ A\vec{p}_3) = (\overset{-1}{\cancel{1}} \cdot \vec{p}_1 \ \overset{1\cdot}{\cancel{4}} \cdot \vec{p}_2 \ \overset{2}{\cancel{6}} \cdot \vec{p}_3)$$

$$= (\vec{p}_1 \ \vec{p}_2 \ \vec{p}_3) \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

から

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$