3 次元固有値問題 (1)

戸瀬　信之

ITOSE PROJECT

2011 年 10 月 18 日 at 駒場
V02 2019 年 10 月 04 日 at 駒場
V03 2920 年 9 月 25 日 at 駒場

復習

$$M_3(\mathbf{K}) = \{A;\ 3\text{次正方行列}\}$$

以下の定理は線型代数の基本である．

Theorem

定理 $A = (\vec{a}_1\ \vec{a}_2\ \vec{a}_3) \in M_3(\mathbf{K})$ に対して以下は同値である．

(1) A は正則である．

(2) $\vec{v} \in \mathbf{K}^3$ に対して $A\vec{v} = \vec{0}$ ならば $\vec{v} = \vec{0}$

(2)' $\vec{a}_1,\ \vec{a}_2,\ \vec{a}_3$ は 1 次独立である．

(3) $f_A:\ \mathbf{K}^3 \to \mathbf{K}^3$ は単射である．

(4) $f_A:\ \mathbf{K}^3 \to \mathbf{K}^3$ は全射である．

(5) $\det(A) \neq 0$

(6) $A \to \cdots \to I_3$ と行基本変形できる．

$f_A : \mathbb{K}^3 \to \mathbb{K}^3$
$\vec{v} \mapsto A\vec{v}$

$A \in M_3(\mathbb{K})$ $\qquad v_1\vec{a}_1 + v_2\vec{a}_2 + v_3\vec{a}_3$

$\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad \shortparallel$

A 正則 $\iff \left(A\vec{v} = \vec{0} \Rightarrow \vec{v} = \vec{0} \right)$

$\iff |A| \neq 0$

A : 正則でない $\iff \exists\, \vec{v} \in \mathbb{K}^3$ に対して $\iff |A| = 0$

$A\vec{v} = \vec{0}$ $\qquad \Uparrow$

3 次の固有値問題

- $A \in M_3(\mathbf{K})$ とする．このとき $\alpha \in \mathbf{K}$ に対して

$(\alpha I_3 - A)\vec{v} = \vec{0}$ $\longleftrightarrow$ $\boxed{A\vec{v} = \alpha\vec{v}}$ を満たす $\vec{v}(\neq \vec{0}) \in \mathbf{K}^3$ が存在する

$$\Leftrightarrow \det(\alpha I_3 - A) = 0$$

- $\Phi_A(\lambda) := \det(\lambda I_3 - A) \in \mathbf{K}[\lambda]$ を A の固有多項式と呼ぶ．
- $A = (a_{ij})$ とすると

$\mathrm{tr}(A)$

$$\rightarrow \quad \Phi_A(\lambda) = \lambda^3 - \boxed{(a_{11} + a_{22} + a_{33})}\lambda^2 + C\lambda - \det(A)$$

- **問題** これはなぜか．C は求まるか．

$$= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

$\uparrow$ 演習問題．

固有多項式の性質

- $A = (a_{ij}) \in M_3(\mathbf{K})$ に対して

$$\mathrm{tr}(A) := a_{11} + a_{22} + a_{33}$$

を A のトレース (trace) と呼ぶ. 定義.

- **定理** P が正則な 3 次行列であるとすると

正方

$$\Phi_{P^{-1}AP}(\lambda) = \Phi_A(\lambda)$$

- **証明**

$$\text{左} = \det(\lambda I_3 - P^{-1}AP) = \det(P^{-1}\lambda I_3 P - P^{-1}AP)$$
$$= \det(P^{-1}(\lambda I_3 - A)P)$$
$$= \boxed{\det(P^{-1})\det(\lambda I_3 - A)\det(P)}$$
$$= \det(\lambda I_3 - A) = \text{右}.$$

$\lambda I_3 = P^{-1}\lambda I_3 P$

$= 1$

$$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \xi\vec{p}_1 + \eta\vec{p}_2 + \zeta\vec{p}_3 = P\begin{pmatrix}\xi\\\eta\\\zeta\end{pmatrix}.$$

$P^{-1}AP$.

$$\begin{pmatrix}x'\\y'\\z'\end{pmatrix} = A\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$$
$$\Updownarrow$$
$$\begin{pmatrix}\xi'\\\eta'\\\zeta'\end{pmatrix} = P^{-1}AP\begin{pmatrix}\xi\\\eta\\\zeta\end{pmatrix}$$

$A, B \in M_3(\mathbb{K})$

$\longrightarrow \det(AB) = \det(A) \cdot \det(B)$

$P \cdot P^{-1} = I_3$

$\longrightarrow \det(P) \cdot \det(P^{-1}) = \det(I_3) = 1.$

固有多項式の性質（2）

- 系

$$\mathrm{tr}(P^{-1}AP) = \mathrm{tr}(A)$$

$$\det(P^{-1}AP) = \det(A)$$

代数学の基本定理

- **定理**　複素係数の多項式

$$f(\lambda) = \lambda^\ell + a_{\ell-1}\lambda^{\ell-1} + \cdots + a_1\lambda + a_0 \in \mathbf{C}[\lambda]$$

は

$$f(\lambda) = (\lambda - \alpha_1)\cdots(\lambda - \alpha_\ell)$$

と 1 次式の積に分解できる（$\alpha_j \in \mathbf{C}$）.

- $A \in M_3(\mathbf{K})$ とすると

$$\Phi_A(\lambda) = (\lambda - \alpha)(\lambda - \beta)(\lambda - \gamma)$$

$= \lambda^3 - *_1\lambda^2 + *_2\lambda + *_3.$

と因数分解できる．ただし $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbf{C}$.

対角化の十分条件

$A \in M_3(\mathbb{R}) \to \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$

定理 1 $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbf{K}$ とする．このとき

$$\alpha \neq \beta,\ \beta \neq \gamma,\ \alpha \neq \alpha$$

ならば正則な $P \in M_3(\mathbf{K})$ が存在して

$$P^{-1}AP$$

を対角行列とできる．

定理 2 $A \in M_3(\mathbf{K})$, $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbf{K}$, $\vec{p}_1, \vec{p}_2, \vec{p}_3 \in \mathbf{K}^3$ が以下の条件を満たすとします.

$$\alpha \neq \beta,\ \ \beta \neq \gamma,\ \alpha \neq \alpha$$

$$A\vec{p}_1 = \alpha\vec{p}_1,\ \ A\vec{p}_2 = \beta\vec{p}_2,\ \ A\vec{p}_3 = \gamma\vec{p}_3$$

$$\vec{p}_1, \vec{p}_2, \vec{p}_3 \neq \vec{0} \ \leftarrow$$

このとき $P = (\vec{p}_1\ \ \vec{p}_2\ \ \vec{p}_3)$ は正則となります.

$$\Updownarrow$$

$$\left(c_1\vec{p_1} + c_2\vec{p_2} + c_3\vec{p_3} = \vec{0} \Rightarrow c_1 = c_2 = c_3 = 0 \right)$$

定理 1 の証明 (2)—定理 2 の証明

$\rightarrow (A-\gamma I_3)\vec{p}_1 = A\vec{p}_1 - \gamma\vec{p}_1 = \alpha\vec{p}_1 - \gamma\vec{p}_1$ $\quad (A-\gamma I_3)\vec{p}_3 = \vec{0}$

$(A-\gamma I_3)\vec{p}_2 = A\vec{p}_2 - \gamma\vec{p}_2 = \beta\vec{p}_2 - \gamma\vec{p}_2$

$$c_1\vec{p}_1 + c_2\vec{p}_2 + c_3\vec{p}_3 = \vec{0} \tag{1}$$

とします．(1) の両辺に $A-\gamma I_3$ を掛けると

$$c_1(\alpha-\gamma)\vec{p}_1 + c_2(\beta-\gamma)\vec{p}_2 = \vec{0} \tag{2}$$

さらに (2) の両辺に $A-\beta I_3$ を掛けると

$(A-\beta I_3)\vec{p}_2 = \vec{0}$

$$c_1(\alpha-\gamma)(\alpha-\beta)\vec{p}_1 = \vec{0}$$

$(A-\beta I_3)\vec{p}_1 = (\alpha-\beta)\vec{p}_1$

$\vec{p}_1 \neq 0$ から $c_1 = 0$ が従う．

$\boxed{\vec{v} \neq \vec{0},\ c\vec{v} = \vec{0} \Rightarrow c = 0}$

$c_1 \underbrace{(\alpha-\gamma)(\alpha-\beta)}_{\neq 0} = 0$

定理 1 の証明 (3)

定理 1 の状況で，ある $\vec{p}_1, \vec{p}_2, \vec{p}_3 \in \mathbf{K}^3$ が存在して

$$A\vec{p}_1 = \alpha\vec{p}_1,\ A\vec{p}_2 = \beta\vec{p}_2,\ A\vec{p}_3 = \gamma\vec{p}_3$$

$$\vec{p}_1, \vec{p}_2, \vec{p}_3 \in \mathbf{K}^3$$

$, \vec{p}_1 \neq \vec{0}, \vec{p}_2 \neq \vec{0}, \vec{p}_3 \neq \vec{0}$

が成立します.

$P = (\vec{p}_1\ \vec{p}_2\ \vec{p}_3)$

$$\begin{aligned} AP &= (A\vec{p}_1\ A\vec{p}_2\ A\vec{p}_3) = (\alpha\vec{p}_1\ \beta\vec{p}_2\ \gamma\vec{p}_3) \\ &= (\vec{p}_1\ \vec{p}_2\ \vec{p}_3)\begin{pmatrix} \alpha & & \\ & \beta & \\ & & \gamma \end{pmatrix} = P\begin{pmatrix} \alpha & & \\ & \beta & \\ & & \gamma \end{pmatrix} \end{aligned}$$

ここで定理 2 から P が正則であることが分かりますから，定理 1 が証明されます.

$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \alpha & & \\ & \beta & \\ & & \gamma \end{pmatrix}$