$\mathbb{K}^2$ が2次元列ベクトルの全体とします。このとき

$(\mathbb{K}^2)^* \ni T$ は $T : \mathbb{K}^2 \to \mathbb{K}$ で線形なものの全体です。

$$T(\lambda \vec{v} + \mu \vec{w}) = \lambda T(\vec{v}) + \mu T(\vec{w})$$

$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^2$ は

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

と標準単位ベクトルで表現できますから

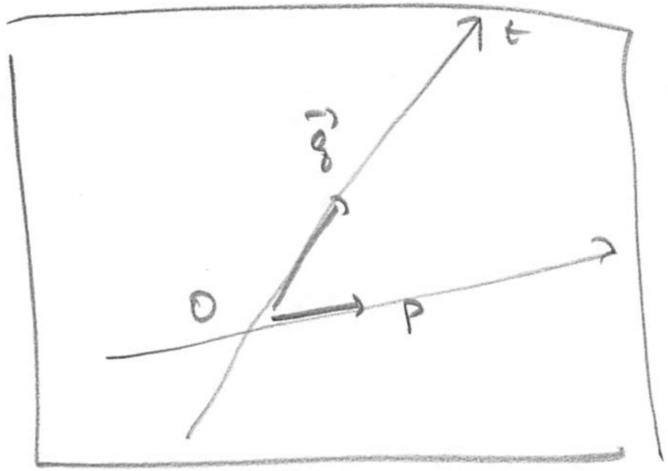
$$T\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = T\left(x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$$
$$= x\, T\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) + y\, T\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$$

となります。$T\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \alpha$, $T\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \beta$ とすると

$$T\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = \alpha x + \beta y = (\alpha \ \ \beta) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

となります。ということで $(\mathbb{K}^2)^*$ は2次元行ベクトルで表わされます。

行ベクトルと列ベクトルは違うのか？



$\mathbb{K}^2$

$\vec{p}, \vec{q} \in \mathbb{K}^2$ で $\vec{p} \nparallel \vec{q}$ とする。このとき

$X = (\vec{p}\ \vec{q})$ は正則で

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = X \begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix} = X^{-1} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

と $\vec{p}, \vec{q}$ が定める座標 s, t ともとの座標 x, y との関係が成り立ちます

$T \in (\mathbb{K}^2)^*$ とすると　$T\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \alpha$, $T\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \beta$ とすると

$$\begin{aligned}
T\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) &= T(s\vec{p} + t\vec{q}) = s\,T(\vec{p}) + t\,T(\vec{q}) \\
&= (T(\vec{p})\ \ T(\vec{q})) \begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix} \\
&= (\alpha p_1 + \beta p_2\ \ \alpha \vec{q}_1 + \beta \vec{q}_2) \begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix} \\
&= (\alpha\ \beta) \begin{pmatrix} p_1 & q_1 \\ p_2 & q_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix} \\
&= (\alpha\ \beta) \begin{pmatrix} p_1 & q_1 \\ p_2 & q_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

と座標変換によってTは

$$(\alpha\ \beta)\,X$$

と表わされることが分かります。これを双対座標の変換則と呼びます。