のとき $f(a)$ が最小になることを（2 次元と 3 次元の場合に）幾何学的に示したことになります．

一般の次元でも，$f(a) = ||\vec{y} - a\vec{x}||^2$ の最小値を取る $a = a_0 = \frac{(\vec{x},\vec{y})}{||\vec{x}||^2}$ の場合

$$(\vec{x}, \vec{y} - a\vec{x}) = (\vec{x}, \vec{y}) - a(\vec{x}, \vec{x}) = (\vec{x}, \vec{y}) - \frac{(\vec{x}, \vec{y})}{||\vec{x}||^2}||\vec{x}||^2 = (\vec{x}, \vec{y}) - (\vec{x}, \vec{y}) = 0$$

から

$$\vec{y} - a\vec{x} \perp \vec{x}$$

であることが分かります．ここで

$$\frac{(\vec{x}, \vec{y})}{||\vec{x}||^2}\vec{x} = \left(\frac{1}{||\vec{x}||}\vec{x}, \vec{y}\right) \cdot \frac{1}{||\vec{x}||}\vec{x}$$

のことを $\vec{y}$ の $\vec{x}$ 方向への**正射影ベクトル**（**直交射影ベクトル**）と定義します．

**演習 1.24.** 次のベクトル $\vec{a}$ と $\vec{b}$ に対して，$\vec{b}$ の $\vec{a}$ 方向の正射影を求めましょう．

**(1)** $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ **(2)** $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ **(3)** $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

## 1.7　2 次元部分空間

### 1.7.1　座標とは

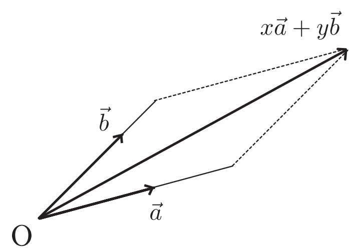
**■定義と座標**　平行でない $n$ 次元ベクトル $\vec{a}$, $\vec{b} \in \mathbf{R}^n$ を考えます（この 1.7 節では $n = 3$ と考えても構いません）．このとき

$$\lambda\vec{a} + \mu\vec{b} = \vec{0} \ \Rightarrow \ \lambda = \mu = 0$$

が成立します．このとき $\mathbf{R}^n$ の部分集合

$$V := \{x\vec{a} + y\vec{b} \in \mathbf{R}^n;\ x, y \in \mathbf{R}\}$$

を考えます．この $V$ を $\vec{a}$ と $\vec{b}$ が生成する（張る）2 次元**部分空間**と呼びます．また $V = L(\vec{a}, \vec{b})$ または $V = \mathbf{R}\vec{a} + \mathbf{R}\vec{b}$ と記すこともあります．



後に 5.1 節で部分空間をより一般的に導入しますが，その基本的な性質は，$V$ に属するベクトルが足し算およびスカラー倍で $V$ の中に留まることです．すなわち

$$\vec{v}_1,\ \vec{v}_2 \in V\ \Rightarrow \vec{v}_1 + \vec{v}_2 \in V,\ \lambda\vec{v}_1 \in V$$

が成立していることです．この性質は

$$\vec{v}_1,\ \vec{v}_2 \in V\ \Rightarrow \lambda\vec{v}_1 + \mu\vec{v}_2 \in V$$

と必要十分です（このとき $V$ は足し算，スカラー倍に関して閉じているといいます）．
実際，$\vec{v}_1$，$\vec{v}_2 \in V$ とすると

$$\vec{v}_1 = x_1\vec{a} + y_1\vec{b}, \quad \vec{v}_2 = x_2\vec{a} + y_2\vec{b}$$

が成立して

$$\begin{aligned}\lambda\vec{v}_1 + \mu\vec{v}_2 &= \lambda(x_1\vec{a} + y_1\vec{b}) + \mu(x_2\vec{a} + y_2\vec{b})\\ &= (\lambda x_1 + \mu x_2)\vec{a} + (\lambda y_1 + \mu y_2)\vec{b} \in V\end{aligned}$$

が分かります．

これまでは $\vec{a}$ と $\vec{b}$ が平行でないことを用いていませんでした．$\vec{v} \in V$ が

$$\vec{v} = x\vec{a} + y\vec{b} = x'\vec{a} + y'\vec{b}$$

と 2 通りに表現されていたとします．このとき

$$(x - x')\vec{a} + (y - y')\vec{b} = \vec{0}$$

から $x = x'$ かつ $y = y'$ が成立します．このことから

$$\varphi :\ \mathbf{R}^2 \longrightarrow V \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto x\vec{a} + y\vec{b}$$

が（次のページに説明してある）全単射であることが分かります．これは $V$ のベクトル $\vec{v}$ を決めると $\vec{v} = x\vec{a} + y\vec{b}$ を満たす $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ がただ 1 つ定まることを意味します．
$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ を**基底**$\vec{a}$，$\vec{b}$ による $\vec{v}$ の**座標**と呼びます．

**写像の単射・全射**　集合 $X$ から集合 $Y$ への写像

$$f:\ X \longrightarrow Y$$

があるとします．このとき $f$ が**単射**であるとは

$$f(x) = f(x') \Rightarrow x = x' \tag{1.33}$$

が成立することです．また $f$ が**全射**であるとは，任意の $y \in Y$ に対して

$$f(x) = y$$

である $x \in X$ が存在することです．$f$ が単射でかつ全射であるとき $f$ は**全単射**であるといいます．

**■座標変換**　次に

$$\vec{\alpha} = \vec{a},\ \vec{\beta} = \vec{a} + \vec{b} \tag{1.34}$$

である $\vec{\alpha},\ \vec{\beta} \in V$ を考えます．定理 1.6 を用いると

$$1 \cdot a - 0 \cdot 1 = 1 \neq 0$$

から $\vec{\alpha} \nparallel \vec{\beta}$ であることに注意しましょう．また

$$V' := L(\vec{\alpha}, \vec{\beta}) = \{\xi\vec{\alpha} + \eta\vec{\beta} \in \mathbf{R}^n;\ \xi, \eta \in \mathbf{R}\}$$

と定めると $\vec{\alpha},\ \vec{\beta} \in V$ から

$$\xi\vec{\alpha} + \eta\vec{\beta} \in V$$

となり，$V' \subset V$ であることが分かります．逆に (1.34) から従う

$$\vec{a} = \vec{\alpha},\ \vec{b} = \vec{\beta} - \vec{\alpha} \tag{1.35}$$

から任意の $\vec{v} = x\vec{a} + y\vec{b} \in V$ に対して

$$\vec{v} = x\vec{\alpha} + y(\vec{\beta} - \vec{\alpha}) = (x - y)\vec{\alpha} + y\vec{\beta} \in V'$$

が成立して，$V \subset V'$ であることが分かります．以上で

$$L(\vec{a}, \vec{b}) = L(\vec{\alpha}, \vec{\beta})$$

であることが示されました．これによって $V$ の基底として $\vec{a}$, $\vec{b}$ ではなくて $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$ と取ってもよいことが分かります．

以上の計算から

$$\vec{v} = x\vec{a} + y\vec{b} = \xi\vec{\alpha} + \eta\vec{\beta}$$

が成立するとき

$$\begin{cases} \xi &= & x - y \\ \eta &= & y \end{cases}$$

が成立することも分かります．これを，基底 $\vec{a}$, $\vec{b}$ から基底 $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$ の取り換えに伴う

座標 $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ と $\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix}$ の間の**座標変換**

といいます．

以上で示したことを一般的にした演習 1.25 を考えましょう．

**演習 1.25.** $\vec{a}$, $\vec{b} \in \mathbf{R}^n$ は平行でないとして，$\vec{p}$, $\vec{q} \in L(\vec{a}, \vec{b})$ を

$$\vec{p} = c_1\vec{a} + d_1\vec{b}, \quad \vec{q} = c_2\vec{a} + d_2\vec{b}$$

と定めます．ここで $\Delta := c_1 d_2 - c_2 d_1 \neq 0$ と仮定します．

**(1)** 等式 $\vec{a} = \dfrac{1}{\Delta}(d_2\vec{p} - d_1\vec{q})$, $\vec{b} = \dfrac{1}{\Delta}(-c_2\vec{p} + c_1\vec{q})$ を示しましょう．

**(2)** $L(\vec{a}, \vec{b}) = L(\vec{p}, \vec{q})$ を示しましょう．

**(3)** $x\vec{a} + y\vec{b} = s\vec{p} + t\vec{q}$ であるとき

$$s = \frac{1}{\Delta}(xd_2 - yc_2), \qquad t = \frac{1}{\Delta}(-xd_1 + yc_1)$$

と座標変換の公式が得られることを示しましょう．

### 1.7.2　Gram-Schmidt の直交化（入門）

**■問題**　これまでと同様に $\vec{a} \nparallel \vec{b}$ である $\vec{a}$, $\vec{b} \in \mathbf{R}^n$ を考えます．$\vec{f} \in \mathbf{R}^n$ に対して

$$||\vec{f} - \vec{v}||^2$$

を最小にする $\vec{v} \in V = L(\vec{a}, \vec{b})$ を求めることを考えましょう．