後期 L09 演習問題

I $p, q, I > 0$ とします．効用関数

$$u(x,y) = x^{\frac{1}{3}} y^{\frac{1}{3}}$$

を制約条件

$$I - px - qy = 0$$

の下で最大化することを考えます．

(1) 停留点を求めて

$$x(p,q,I) = \frac{I}{2p}, \quad y(p,q,I) = \frac{I}{2q}, \quad \lambda = \frac{1}{3}\sqrt[3]{\frac{2}{pqI}}$$

であることを示しましょう．

(2) 間接効用関数

$$v(p,q,I) = u(x(p,q,I), y(p,q,I))$$

に対して

$$\frac{\partial v}{\partial I} = \lambda(p,q,I)$$

が成立することを示しましょう．

(3) Roy の恒等式

$$\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial I} \cdot x(p,q,I) = 0$$

が成立することを示しましょう．

解答 (x,y) で極大または極小とすると

$$\begin{cases} \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}y^{\frac{1}{3}} - \lambda p & = & 0 & \ldots\ldots(1) \\ \frac{1}{3}x^{\frac{1}{3}}y^{-\frac{2}{3}} - \lambda q & = & 0 & \ldots\ldots(2) \\ I - px - qy & = & 0 & \ldots\ldots(3) \end{cases}$$

を満たす $\lambda \in \mathbf{R}$ が存在します．(1)$\times x$ と (2)$\times y$ から

$$\lambda px = \frac{1}{3}x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{1}{3}}, \quad \lambda qy = \frac{1}{3}x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{1}{3}}$$

が分かります．(1) または (2) から $\lambda \neq 0$ が必要ですから

$$px = qy = \frac{1}{3\lambda}x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{1}{3}}$$

となります．さらに (3) を用いると

$$px = qy = \frac{I}{2} \quad 従って \quad x = \frac{I}{2p},\ y = \frac{I}{2q}$$

となります．(1),(2) から

$$\frac{1}{9}x^{-\frac{1}{3}}y^{-\frac{1}{3}} - \lambda^2 pq = 0$$

となりますから

$$\lambda^2 = \frac{1}{9pq}\sqrt[3]{\frac{4pq}{I^2}} = \frac{1}{3^2}\sqrt[3]{\frac{2^2}{p^2q^2I^2}}$$

従って

$$\lambda = \frac{1}{3}\sqrt[3]{\frac{2}{pqI}}$$

であることが分かります. (1) から $\lambda > 0$ となることに注意しましょう.

(2)

$$間接効用関数 v(p,q,I) = \left(\frac{I}{2p}\right)^{\frac{1}{3}}\left(\frac{I}{2q}\right)^{\frac{1}{3}} = \frac{I^{\frac{2}{3}}}{2^{\frac{2}{3}}p^{\frac{1}{3}}q^{\frac{1}{3}}}$$

を I で偏微分すると

$$\frac{\partial v}{\partial I} = \frac{2}{3}\cdot\frac{I^{-\frac{1}{3}}}{2^{\frac{2}{3}}p^{\frac{1}{3}}q^{\frac{1}{3}}} = \frac{1}{3}\cdot\frac{2^{\frac{1}{3}}}{p^{\frac{1}{3}}q^{\frac{1}{3}}I^{\frac{1}{3}}} = \lambda$$

となります.

注意　これから $\lambda(p,q,I)$ を**所得の限界効用関数**と呼びます.

(3) 間接効用関数 $v(p,q,I)$ を p で偏微分すると

$$\begin{aligned}
\frac{\partial v}{\partial p} &= -\frac{1}{3}\cdot\frac{I^{\frac{2}{3}}}{2^{\frac{2}{3}}p^{\frac{4}{3}}q^{\frac{1}{3}}} \\
&= -\frac{I}{2p}\cdot\frac{2p}{I}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{I^{\frac{2}{3}}}{2^{\frac{2}{3}}p^{\frac{4}{3}}q^{\frac{1}{3}}} \\
&= -\frac{I}{2p}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{2^{\frac{1}{3}}}{p^{\frac{1}{3}}q^{\frac{1}{3}}I^{\frac{1}{3}}} \\
&= -\frac{I}{2p}\cdot\lambda = -x\frac{\partial v}{\partial I}
\end{aligned}$$

と Roy の恒等式が成立することが分かります.

II $p,q,I > 0$ とします. 効用関数

$$u(x,y) = \frac{1}{3}\log x + \frac{1}{3}\log y$$

を制約条件

$$I - px - qy = 0$$

の下で最大化することを考えます. 停留点を求めて、需要関数と所得の限界効用関数 $\lambda(p,q,I)$ を求めましょう.

解答 (x,y) で極大または極小とすると

$$\left\{\begin{array}{lcll}
\frac{1}{3}\frac{1}{x} - \lambda p &=& 0 & \ldots\ldots(1) \\
\frac{1}{3}\frac{1}{y} - \lambda q &=& 0 & \ldots\ldots(2) \\
I - px - qy &=& 0 & \ldots\ldots(3)
\end{array}\right.$$

を満たす $\lambda \in \mathbf{R}$ が存在します. (1),(2) から

$$\left\{\begin{array}{lcll}
\lambda p &=& \frac{1}{3}\frac{1}{x} & \ldots\ldots(1)' \\
\lambda q &=& \frac{1}{3}\frac{1}{y} & \ldots\ldots(2)'
\end{array}\right.$$

であることが分かります．(1)'/(2)' から

$$\frac{p}{q} = \frac{y}{x} \quad \text{すなわち} \quad px = qy$$

が従います．(3) から

$$px = qy = \frac{I}{2} \quad \text{従って} \quad x = \frac{I}{2p},\ y = \frac{I}{2q}$$

を得ます．このとき所得の限界効用関数は

$$\lambda = \frac{1}{3p} \cdot \frac{2p}{I} = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{I}$$

となります．

注意

$$U(x,y) := e^{u(x,y)} = x^{\frac{1}{3}} y^{\frac{1}{3}}$$

と定義すると

$$u(x,y) = C \ \Leftrightarrow U(x,y) = e^C$$

となります．$U(x,y)$ が問題 I の効用関数にあたることに注意すると，2 つの効用関数の無差別曲線族が同じものであることが分かります．需要関数が無差別曲線族にしかよらないことの例を与えてくれます．

III $p,q,I > 0$ とします．効用関数

$$u(x,y) = x^{\frac{1}{3}} y^{\frac{2}{3}}$$

を制約条件

$$I - px - qy = 0$$

の下で最大化することを考えます．停留点を求めて、需要関数と所得の限界効用関数 $\lambda(p,q,I)$ を求めましょう．

解答 (x,y) で極大または極小とすると

$$\begin{cases} \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}y^{\frac{2}{3}} - \lambda p &= 0 \quad \ldots\ldots(1) \\ \frac{2}{3}x^{\frac{1}{3}}y^{-\frac{1}{3}} - \lambda q &= 0 \quad \ldots\ldots(2) \\ I - px - qy &= 0 \quad \ldots\ldots(3) \end{cases}$$

を満たす $\lambda \in \mathbf{R}$ が存在します．(1),(2) から

$$\begin{cases} \lambda p = \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}y^{\frac{2}{3}} \quad \ldots\ldots(1)' \\ \lambda q = \frac{2}{3}x^{\frac{1}{3}}y^{-\frac{1}{3}} \ldots\ldots(2)' \end{cases}$$

が従います．(1)'/(2)' から

$$\frac{p}{q} = \frac{1}{2} \cdot \frac{y}{x} \quad \text{従って} \quad px = \frac{1}{2}qy$$

となります．これを (3) に代入すると

$$I - \frac{1}{2}qy - qy = I - \frac{3}{2}qy = 0$$

から

$$x=\frac{I}{3p},\quad y=\frac{2I}{3p}$$

と需要関数が求まります．このとき所得の限界効用関数は

$$\lambda=\frac{1}{q}\cdot\left(\frac{\frac{I}{3p}}{\frac{2I}{3q}}\right)^{\frac{1}{3}}=\frac{1}{\sqrt[3]{2q^2p}}$$

となります．

IV $p,q,I>0$ とします．効用関数

$$u(x,y)=x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{2}{3}}$$

を制約条件

$$I-px-qy=0$$

の下で考えます．停留点を求めて極大点であることを示しましょう．

解答　$g(x,y)=I-px-qy$ とすると

$$g_x=-p,\ g_y=-q$$

$$u_x=\frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}y^{\frac{2}{3}},\ u_y=\frac{2}{3}x^{\frac{1}{3}}y^{-\frac{1}{3}}$$

となります．(x,y) で極大または極小ならば

$$\begin{cases}\frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}y^{\frac{2}{3}}+\lambda(-p) & = & 0 & \cdots\cdots(i)\\ \frac{2}{3}x^{\frac{1}{3}}y^{-\frac{1}{3}}+\lambda(-q) & = & 0 & \cdots\cdots(ii)\\ I-px-qy & = & 0 & \ldots\ldots(iii)\end{cases}$$

を満たす $\lambda\in\mathbf{R}$ が存在します．$x,y>0$ ですから (i) から $\lambda\neq 0$ が分かります．さらに (i) と (ii) から

$$\begin{cases}\lambda p & = & \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}y^{\frac{2}{3}} & \cdots\cdots(i)'\\ \lambda q & = & \frac{2}{3}x^{\frac{1}{3}}y^{-\frac{1}{3}} & \cdots\cdots(ii)'\end{cases}$$

が従います．(i)'/(ii)' から

$$\frac{p}{q}=\frac{1}{2}\cdot\frac{y}{x}\quad 従って\quad px=\frac{1}{2}qy$$

となります．(iii) に代入すると

$$I-\frac{1}{2}qy-qy=I-\frac{3}{2}qy=0$$

が導かれ

$$x=\frac{I}{3p},\quad y=\frac{2I}{3q}$$

となります．さらに (ii)' から

$$\lambda=\frac{1}{q}\left(\frac{I}{3p}\right)^{\frac{1}{3}}\left(\frac{2I}{3q}\right)^{-\frac{1}{3}}=\left(\frac{1}{2q^2p}\right)^{\frac{1}{3}}$$

となります．次に 2 階の条件を確認します．

$$g_{xx}=g_{xy}=g_{yx}=g_{yy}=0$$

$$u_{xx} = -\frac{2}{9}x^{-\frac{5}{3}}y^{\frac{2}{3}},\ u_{xy} = u_{yx} = \frac{2}{9}x^{-\frac{2}{3}}y^{-\frac{1}{3}},\ u_{yy} = -\frac{2}{9}x^{\frac{1}{3}}y^{-\frac{4}{3}}$$

となります．このとき $L = f + \lambda g$ とすると

$$\begin{aligned}\begin{vmatrix} 0 & g_x & g_y \\ g_x & L_{xx} & L_{xy} \\ g_y & L_{yx} & L_{yy} \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} 0 & -p & -q \\ -p & -\frac{2}{9}x^{-\frac{5}{3}}y^{\frac{2}{3}} & \frac{2}{9}x^{-\frac{2}{3}}y^{-\frac{1}{3}} \\ -q & \frac{2}{9}x^{-\frac{2}{3}}y^{-\frac{1}{3}} & -\frac{2}{9}x^{\frac{1}{3}}y^{-\frac{4}{3}} \end{vmatrix} \\ &= \frac{2}{9}x^{-\frac{5}{3}}y^{\frac{2}{3}}q^2 + \frac{4}{9}x^{-\frac{2}{3}}y^{-\frac{1}{3}}pq + \frac{2}{9}x^{\frac{1}{3}}y^{-\frac{4}{3}}p^2 > 0\end{aligned}$$

から停留点で極大であることが分かります．

V $p, q, I > 0$ とします．効用関数

$$u(x,y) = \frac{1}{3}\log x + \frac{2}{3}\log y$$

を制約条件

$$I - px - qy = 0$$

の下で考えます．停留点を求めて極大点であることを示しましょう．

解答 $g(x,y) = I - px - qy$ とすると

$$g_x = -p, \quad g_y = -q$$

$$u_x = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{x}, \quad u_y = -\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{y}$$

となります．(x,y) で極大または極大とすると

$$\begin{cases} \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{x} + \lambda(-p) &= 0 \quad \cdots\cdots(i) \\ \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{y} + \lambda(-q) &= 0 \quad \cdots\cdots(ii) \\ I - px - qy &= 0 \quad \ldots\ldots(iii) \end{cases}$$

を満たす $\lambda \in \mathbf{R}$ が存在します．(i) において $\lambda = 0$ とすると $\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{x} = 0$ となりますが，これを満たす x は存在しません．従って $\lambda \neq 0$ であることが分かります．(i)(ii) から

$$px = \frac{1}{3\lambda}, \quad qy = \frac{2}{3\lambda} \tag{iv}$$

が分かりますから，(iii) に代入して

$$I - \frac{1}{3\lambda} - \frac{2}{3\lambda} = I - \frac{1}{\lambda} = 0 \quad \text{すなわち} \quad \lambda = \frac{1}{I}$$

となります．これを (iv) に代入して

$$x = \frac{I}{3p}, \quad y = \frac{2I}{3q}$$

であることが分かります．

次に 2 階の条件を確認しましょう．

$$g_{xx} = g_{xy} = g_{yx} = g_{yy} = 0$$

$$u_{xx} = -\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{x^2}, \quad u_{xy} = u_{yx} = 0, \quad u_{yy} = -\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{y^2}$$

であることが分かります．これから

$$\begin{aligned}\begin{vmatrix} 0 & g_x & g_y \\ g_x & L_{xx} & L_{xy} \\ g_y & L_{yx} & L_{yy} \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} 0 & -p & -q \\ -p & -\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{x^2} & 0 \\ -q & 0 & -\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{y^2} \end{vmatrix} \\ &= \frac{1}{3}\cdot 1x^2q^2 + \frac{2}{3}\cdot 1y^2p^2 > 0\end{aligned}$$

から停留点で極大であることが分かります．

VI $u(x,y) = x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{1}{3}}$ とします．制約条件

$$u(x,y) = \bar{u}$$

の下で $f(x,y) = px + qy$ を考えます．停留点を求めましょう．

解答 (x,y) で極大・極小であるとすると

$$\begin{cases} p - \mu\cdot x^{-\frac{2}{3}}y^{\frac{1}{3}} &= 0 \quad \cdots\cdots(i) \\ q - \mu\cdot x^{\frac{1}{3}}y^{-\frac{2}{3}} &= 0 \quad \cdots\cdots(ii) \\ x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{1}{3}} - \bar{u} &= 0 \quad \ldots\ldots(iii) \end{cases}$$

を満たす $\mu \in \mathbf{R}$ が存在します．(i) と (ii) から

$$\begin{cases} \mu\cdot x^{-\frac{2}{3}}y^{\frac{1}{3}} &= p \quad \cdots\cdots(i)' \\ \mu\cdot x^{\frac{1}{3}}y^{-\frac{2}{3}} &= q \quad \cdots\cdots(ii') \end{cases}$$

を得ます．(i)'/(ii)' から

$$\frac{y}{x} = \frac{p}{q}$$

となります．$y = \frac{p}{q}x$ として (iii) に代入すると

$$\bar{u} = x^{\frac{1}{3}}\left(\frac{p}{q}\right)^{\frac{1}{3}}\cdot x^{\frac{1}{3}} = \left(\frac{p}{q}\right)^{\frac{1}{3}}\cdot x^{\frac{2}{3}}$$

から

$$x = \left(\bar{u}\cdot\left(\frac{q}{p}\right)^{\frac{1}{3}}\right)^{\frac{3}{2}} = \bar{u}^{\frac{3}{2}}\left(\frac{q}{p}\right)^{\frac{1}{2}}$$

を得ます．また同様に

$$y = \bar{u}^{\frac{3}{2}}\left(\frac{p}{q}\right)^{\frac{1}{2}}$$

を得ます．このとき Lagrange 未定乗数は

$$\mu = 3\bar{u}^{\frac{1}{2}}p^{\frac{1}{2}}q^{\frac{1}{2}}$$

となります．

注意 ここで得た

$$x^*(p,q,\bar{u}) = \bar{u}^{\frac{3}{2}}\left(\frac{q}{p}\right)^{\frac{1}{2}}, \quad y^*(p,q,\bar{u}) = \bar{u}^{\frac{3}{2}}\left(\frac{p}{q}\right)^{\frac{1}{2}}$$

を **Higgs 型（補償）需要関数**と呼びます.

VII VI によって得られた **Higgs 型（補償）需要関数**を

$$x^*(p,q,\bar{u}),\ y^*(p,q,\bar{u})$$

とします. **最小支出関数**

$$E(p,q,\bar{u}) = px^*(p,q,\bar{u}) + qy^*(p,q,\bar{u})$$

と定めるとき，**マッケンジーの補題**

$$\frac{\partial E}{\partial p}(p,q,\bar{u}) = x^*(p,q,\bar{u})$$

$$\frac{\partial E}{\partial q}(p,q,\bar{u}) = y^*(p,q,\bar{u})$$

が成立することを示しましょう.

解答 最小支出関数は

$$\begin{aligned} E(p,q,\bar{u}) &= p\cdot\bar{U}^{\frac{2}{3}}\left(\frac{q}{p}\right)^{\frac{1}{2}} + q\cdot\bar{U}^{\frac{2}{3}}\left(\frac{p}{q}\right)^{\frac{1}{2}} \\ &= 2\bar{u}^{\frac{3}{2}}p^{\frac{1}{2}}q^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

となります. これから

$$\begin{aligned} \frac{\partial E}{\partial p} &= \bar{u}^{\frac{3}{2}}p^{-\frac{1}{2}}q^{\frac{1}{2}} = x^*(p,q,\bar{u}) \\ \frac{\partial E}{\partial q} &= \bar{u}^{\frac{3}{2}}p^{\frac{1}{2}}q^{-\frac{1}{2}} = y^*(p,q,\bar{u}) \end{aligned}$$

VIII VII に引続き，$I-px-qy=0$ の下で $u(x,y)=x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{1}{3}}$ を最大化して需要関数

$$x(p,q,I)=\frac{I}{2p},\ y(p,q,I)=\frac{I}{2p}, \tag{19}$$

を得たとします．間接効用関数を

$$v(p,q,I)=u(x(p,q,I),x(p,q,I)) \tag{20}$$

と定めるとき，以下が成立することを具体的に計算して示しましょう．

(1)

$$x^*(p,q,\bar{u})=x(p,q,E(p,q,\bar{u})) \tag{21}$$

(2)

$$x(p,q,I)=x^*(p,q,v(p,q,I)) \tag{22}$$

(3)

$$v(p,q,E(p,q,\bar{u}))=\bar{u} \tag{23}$$

(4)

$$E(p,q,v(p,q,I))=I \tag{24}$$

解答 (1)

$$x(p,q,E(p,q,\bar{u}))=\frac{E(p,q,\bar{u})}{2p}=\frac{2\bar{u}^{\frac{3}{2}}p^{\frac{1}{2}}q^{\frac{1}{2}}}{2p}=\bar{u}^{\frac{3}{2}}\left(\frac{q}{p}\right)^{\frac{1}{2}}=x^*(p,q,\bar{u})$$

(2)

$$v(p,q,I)=\left(\frac{I}{2p}\right)^{\frac{1}{3}}\left(\frac{I}{2q}\right)^{\frac{1}{3}}=\frac{I^{\frac{2}{3}}}{2^{\frac{2}{3}}p^{\frac{1}{3}}q^{\frac{1}{3}}}$$

から

$$x^*(p,q,v(p,q,I))=\left(\frac{I^{\frac{3}{2}}}{2^{\frac{2}{3}}p^{\frac{1}{3}}q^{\frac{1}{3}}}\right)^{\frac{3}{2}}\left(\frac{q}{p}\right)^{\frac{1}{2}}=\frac{I}{2p^{\frac{1}{2}}q^{\frac{1}{2}}}\left(\frac{q}{p}\right)^{\frac{1}{2}}=\frac{I}{2p}=x(p,q,I)$$

(3)

$$v(p,q,E(p,q,\bar{u}))=\frac{\left(2\bar{u}^{\frac{3}{2}}p^{\frac{1}{2}}q^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{2}{3}}}{2^{\frac{2}{3}}p^{\frac{1}{3}}q^{\frac{1}{3}}}=\frac{2^{\frac{2}{3}}\bar{u}p^{\frac{1}{3}}q^{\frac{1}{3}}}{2^{\frac{2}{3}}p^{\frac{1}{3}}q^{\frac{1}{3}}}=\bar{u}$$

(4)

$$E(p,q,v(p,q,I))=2v(p,q,I)^{\frac{3}{2}}p^{\frac{1}{2}}q^{\frac{1}{2}}=2\left(\frac{I^{\frac{2}{3}}}{2^{\frac{2}{3}}p^{\frac{1}{3}}q^{\frac{1}{3}}}\right)^{\frac{3}{2}}p^{\frac{1}{2}}q^{\frac{1}{2}}=2\frac{I}{2p^{\frac{1}{2}}q^{\frac{1}{2}}}p^{\frac{1}{2}}q^{\frac{1}{2}}=I$$

補足 スルツキー方程式　VIII を用いると

$$x^*(p,q,\bar{u})=x(p,q,E(p,q,\bar{u}))$$

が成立することが分かります．この両辺を p, q で偏微分すると

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial x^*}{\partial p} &= \frac{\partial x}{\partial p} + \frac{\partial x}{\partial I} \cdot \frac{\partial E}{\partial p} \\
&= \frac{\partial x}{\partial p} - \frac{\partial x}{\partial I} \cdot x \\
\frac{\partial x^*}{\partial q} &= \frac{\partial x}{\partial q} + \frac{\partial x}{\partial I} \cdot \frac{\partial E}{\partial q} \\
&= \frac{\partial x}{\partial q} - \frac{\partial x}{\partial I} \cdot y
\end{aligned}
$$

を得ます．$\frac{\partial y^*}{\partial p}$, $\frac{\partial y^*}{\partial q}$ も同様に計算すると

$$
\begin{pmatrix} \frac{\partial x^*}{\partial p} & \frac{\partial x^*}{\partial q} \\ \frac{\partial y^*}{\partial p} & \frac{\partial y^*}{\partial q} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial p} & \frac{\partial x}{\partial q} \\ \frac{\partial y}{\partial p} & \frac{\partial y}{\partial q} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial I} \\ \frac{\partial y}{\partial I} \end{pmatrix} (x \ y)
$$

が従います．これをスルツキー方程式と呼びます．