後期 L08 演習問題

I $\alpha, \beta > 0, A > 0$ を定数として Cobb-Douglas 型関数

$$Y = F(K, L) = AK^\alpha L^\beta \tag{13}$$

と定義します.

(1) F_{KK}, F_{KL}, F_{LK}, F_{LL} を求めましょう.

(2) 第 1 象限のすべての点 $(K, L) \in \mathbf{R}^2_{++}$ に対して

$$F_{KK}(K, L) < 0,\ \text{かつ}\ \det(H(F)(K, L) > 0 \tag{14}$$

を満たす α, β の条件を求めましょう.

解答 (1)

$$F_K(K, L) = \alpha \cdot AK^{\alpha-1}L^\beta, \quad F_L(K, L) = \beta \cdot AK^\alpha L^{\beta-1}$$

から

$$\begin{aligned}
F_{KK}(K, L) &= \alpha(\alpha-1) \cdot AK^{\alpha-2}L^\beta \\
F_{KL}(K, L) &= \alpha\beta \cdot AK^{\alpha-1}L^{\beta-1} \\
F_{LK}(K, L) &= \alpha\beta \cdot AK^{\alpha-1}L^{\beta-1} \\
F_{LL}(K, L) &= \beta(\beta-1) \cdot AK^\alpha L^{\beta-2}
\end{aligned}$$

となります. 一般論で成立することが分かっていますが, $F_{KL} = F_{LK}$ に注意しましょう.

(2) $\alpha \cdot AK^{\alpha-2}L^\beta > 0$ から

$$F_{KK}(K, L) < 0 \Leftrightarrow \alpha < 1$$

が分かります. 次に

$$\begin{aligned}
\det(H(F)(K, L)) &= F_{KK}(K, L) \cdot F_{LL}(K, L) - F_{KL}(K, L)^2 \\
&= \alpha(\alpha-1) \cdot AK^{\alpha-2}L^\beta \cdot \beta(\beta-1) \cdot AK^\alpha L^{\beta-2} - \left(\alpha\beta \cdot AK^{\alpha-1}L^{\beta-1}\right)^2 \\
&= A^2K^{2\alpha-2}L^{2\beta-2}\left\{\alpha\beta(\alpha-1)(\beta-1) - \alpha^2\beta^2\right\} \\
&= A^2K^{2\alpha-2}L^{2\beta-2}\alpha\beta(1-\alpha-\beta)
\end{aligned}$$

となります. $= A^2K^{2\alpha-2}L^{2\beta-2} > 0, \alpha\beta > 0$ から

$$\det(H(F)(K, L)) \Leftrightarrow \alpha + \beta < 1$$

が分かります. 以上で求める条件は

$$\alpha < 1, \quad \alpha + \beta < 1$$

であることが分かります. この条件は

$$\alpha < 1, \quad \beta < 1, \quad \alpha + \beta < 1$$

と必要十分であることにも注意しましょう.

III 生産関数

$$f(x,y) = x^{\alpha}y^{\beta} \quad (\alpha,\beta > 0)$$

を考えます.

(1) $\det(H(f))$, f_{xx} を計算しましょう.

(2) $\alpha+\beta \neq 1$ のとき，利潤関数

$$\pi(x,y) := pf(x,y) - qx - ry$$

の停留点を求めましょう．ここでは $p,q,r>0$ とします.

(3) $\alpha+\beta<1$ のとき利潤を最大化する (x,y) がただ一つ存在することを示しましょう.

解答 (1)

$$\begin{aligned} f_x &= \alpha x^{\alpha-1}y^{\beta} \\ f_y &= \beta x^{\alpha}y^{\beta-1} \end{aligned}$$

から

$$\begin{aligned} f_{xx} &= \alpha(\alpha-1)x^{\alpha-2}y^{\beta} \\ f_{xy} &= f_{yx} = \alpha\beta x^{\alpha-1}y^{\beta-1} \\ f_{yy} &= \beta(\beta-1)x^{\alpha}y^{\beta-2} \end{aligned}$$

が分かります．これから

$$\begin{aligned} \det H(f) &= \begin{vmatrix} \alpha(\alpha-1)x^{\alpha-2}y^{\beta} & \alpha\beta x^{\alpha-1}y^{\beta-1} \\ \alpha\beta x^{\alpha-1}y^{\beta-1} & \beta(\beta-1)x^{\alpha}y^{\beta-2} \end{vmatrix} \\ &= x^{2\alpha-2}y^{2\beta-2}\left(\alpha(\alpha-1)\beta(\beta-1) - \alpha^2\beta^2\right) \\ &= x^{2\alpha-2}y^{2\beta-2}\alpha\beta\left((\alpha-1)(\beta-1) - \alpha\beta\right) \\ &- x^{2\alpha-2}y^{2\beta-2}\alpha\beta(1-\alpha-\beta) \end{aligned}$$

となります.

(2) $\pi_x = \pi_y = 0$ すなわち

$$\begin{cases} p\alpha x^{\alpha-1}y^{\beta} - q &= 0 \quad \ldots\ldots(1) \\ p\beta x^{\alpha}y^{\beta-1} - r &= 0 \quad \ldots\ldots(2) \end{cases}$$

を解きます．これは

$$\begin{cases} x^{\alpha-1}y^{\beta} &= \frac{q}{p\alpha} \quad \ldots\ldots(1)' \\ x^{\alpha}y^{\beta-1} &= \frac{r}{p\beta} \quad \ldots\ldots(2)' \end{cases}$$

と必要十分です. $(1)'/(2)'$ から

$$x^{-1}y = \frac{q}{r}\cdot\frac{\beta}{\alpha} \quad 従って \quad y = \frac{q}{r}\cdot\frac{\beta}{\alpha}x$$

となりますが，これを (1)' に代入すると

$$x^{\alpha-1}\left(\frac{q}{r}\cdot\frac{\beta}{\alpha}\right)^{\beta}x^{\beta} = \frac{q}{p\alpha}$$

から

$$\begin{aligned} x^{\alpha+\beta-1} &= \frac{q}{p\alpha}\cdot\frac{r^{\beta}}{q^{\beta}}\cdot\frac{\alpha^{\beta}}{\beta^{\beta}} \\ &= \left(\frac{\alpha}{q}\right)^{\beta-1}\left(\frac{r}{\beta}\right)^{\beta}\cdot\frac{1}{p} \end{aligned}$$

から

$$x = \left(\frac{\alpha}{q}\right)^{\frac{\beta-1}{\alpha+\beta-1}}\left(\frac{r}{\beta}\right)^{\frac{\beta}{\alpha+\beta-1}}\cdot\left(\frac{1}{p}\right)^{\frac{1}{\alpha+\beta-1}}$$

同様に

$$y = \left(\frac{q}{\alpha}\right)^{\frac{\alpha}{\alpha+\beta-1}}\left(\frac{r}{\beta}\right)^{\frac{\alpha-1}{\alpha+\beta-1}}\cdot\left(\frac{1}{p}\right)^{\frac{1}{\alpha+\beta-1}}$$

となります.

(3) $\alpha+\beta<1$ のとき $\alpha,\beta>0$ から $\alpha,\beta<1$ が従いますから

$$\pi_{xx} = pf_{xx}f_{xx} = p\alpha(\alpha-1)x^{\alpha-2}y^{\beta} < 0$$

が常に成立します．さらに

$$\begin{aligned} \det(H(\pi)) &= \begin{vmatrix} pf_{xx} & pf_{xy} \\ pf_{yx} & pf_{yy} \end{vmatrix} = p^2\det(H(f)) \\ &= p^2\alpha\beta(1-\alpha-\beta)x^{2\alpha-2}y^{2\beta-2} > 0 \end{aligned}$$

となります．従って (2) で求めた停留点を (x_0,y_0) とすると

$$\pi(x,y) < \pi(x_0,y_0) \quad ((x,y)\in\mathbf{R}^2_{++},\ (x,y)\neq(x_0,y_0))$$

が成立します.

III 生産関数 $f(x,y)=x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{1}{3}}$ に対する利潤関数

$$\pi(x,y)=pf(x,y)-qx-ry$$

を最大化して生産要素需要関数

$$x(p,q,r)=\frac{p^3}{27q^2r},\quad y(p,q,r)=\frac{p^3}{27qr^2}$$

を求めました．利潤関数

$$\Pi(p,q,r)=\pi(x(p,q,r),y(p,q,r))$$

生産物供給関数

$$z(p,q,r)=f(x(p,q,r),y(p,q,r))$$

を定義すると

$$z(p,q,r)=\frac{\partial\Pi}{\partial p},\quad x(p,q,r)=-\frac{\partial\Pi}{\partial q},\quad y(p,q,r)=-\frac{\partial\Pi}{\partial r}$$

が成立することを、具体的に両辺を計算することで示しましょう．

解答

$$\begin{aligned}\Pi(p,q,r)&=r\cdot\left(\frac{p^3}{27q^2r}\right)^{\frac{1}{3}}\left(\frac{p^3}{27qr^2}\right)^{\frac{1}{3}}-q\cdot\frac{p^3}{27q^2r}-r\cdot\frac{p^3}{27qr^2}\\&=\frac{p^3}{9qr}-\frac{p^3}{279r}-\frac{p^3}{27qr}\\&=\frac{p^3}{27qr}\\z(p,q,r)&=\left(\frac{p^3}{27q^2r}\right)^{\frac{1}{3}}\left(\frac{p^3}{27qr^2}\right)^{\frac{1}{3}}=\frac{p^2}{9qr}\end{aligned}$$

となります．これから

$$\begin{aligned}\frac{\partial\Pi}{\partial p}&=\frac{3p^2}{27qr}=\frac{p^2}{9qr}=z(p,q,r)\\\frac{\partial\Pi}{\partial q}&=-\frac{p^3}{27q^2r}=-x(p,q,r)\\\frac{\partial\Pi}{\partial q}&=-\frac{p^3}{27qr^2}=-y(p,q,r)\end{aligned}$$

と Hotelling の補題が成立することが分かります．

IV $\alpha, \beta > 0$, $\rho > 0$ を定数として CES 関数を

$$Y = F(K, L) = (\alpha K^\rho + \beta L^\rho)^{\frac{1}{\rho}} \tag{15}$$

と定義します. **(1)** $\log F(K, L)$ を K, L で微分して $F_K(K, L)$, $F_L(K, L)$ を求めましょう.
(2) $F(K, L)$ が Euler の等式

$$K \cdot F_K(K, L) + L \cdot F_L(K, L) = F(K, L) \tag{16}$$

を満たすことを示しましょう.

解答 (1)

$$\log F(K, L) = \frac{1}{\sigma} \cdot \log\left(\alpha K^\sigma + \beta L^\sigma\right)$$

の両辺を K, L で偏微分すると

$$\frac{F_K(K, L)}{F(K, L)} = \frac{1}{\sigma} \cdot \frac{\sigma \alpha K^{\sigma-1}}{\alpha K^\sigma + \beta L^\sigma} = \frac{\alpha K^{\sigma-1}}{\alpha K^\sigma + \beta L^\sigma}$$
$$\frac{F_L(K, L)}{F(K, L)} = \frac{1}{\sigma} \cdot \frac{\sigma \beta L^{\sigma-1}}{\alpha K^\sigma + \beta L^\sigma} = \frac{\alpha L^{\sigma-1}}{\alpha K^\sigma + \beta L^\sigma}$$

となります. これから

$$F_K(K, L) = \frac{\alpha K^{\sigma-1}}{\alpha K^\sigma + \beta L^\sigma} \cdot F(K, L)$$
$$F_L(K, L) = \frac{\beta L^{\sigma-1}}{\alpha K^\sigma + \beta L^\sigma} \cdot F(K, L)$$

となります.
(2)(1) の最後の 2 式にそれぞれ K と L を掛けて加えると

$$K \cdot F_K(K, L) + L \cdot F_L(K, L) = \frac{\alpha K^\sigma + \beta L^\sigma}{\alpha K^\sigma + \beta L^\sigma} \cdot F(K, L) = F(K, L)$$

から $F(K, L)$ が Euler の等式を満たすことが分かります.

V $p, q, r > 0$ とします. 生産関数

$$f(x, y) = x^{\frac{1}{3}} y^{\frac{1}{2}}$$

に対して利潤関数

$$\pi(x, y) = r f(x, y) - px - qy$$

を考えます. $\pi(x, y)$ の停留点を求めましょう.

解答

$$\pi(x, y) = r x^{\frac{1}{3}} y^{\frac{1}{2}} - px - qy$$

を偏微分すると

$$\pi_x = \frac{r}{3} \cdot x^{-\frac{2}{3}} y^{\frac{1}{2}} - p = 0, \quad \pi_y = \frac{r}{3} \cdot x^{\frac{1}{3}} y^{-\frac{1}{2}} - q = 0$$

となります．これは整理すると

$$x^{-\frac{2}{3}}y^{\frac{1}{2}} = \frac{3p}{r} \tag{1}$$
$$x^{\frac{1}{3}}y^{-\frac{1}{2}} = \frac{2q}{r} \tag{2}$$

となります．(1)× (2) から

$$x^{-\frac{1}{3}} = \frac{6pq}{r^2} \quad 従って \quad x = \frac{r^6}{2^3 3^3 p^3 q^3}$$

となります．さらに

$$y^{\frac{1}{2}} = x^{\frac{2}{3}}\frac{3p}{r} = \frac{r^3}{12pq^2} \quad 従って \quad y = \frac{r^6}{144p^2q^4}$$

となります．

VI 以下の関数が第 1 象限 $\mathbf{R}^2_{++}$ 上で Euler 方程式を満たすことを示しましょう．
(1) $u(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$, **(2)** $u(x,y) = x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{2}{3}}$

解答 (1)

$$u_x = \frac{1}{2}\cdot\frac{2x}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$$
$$u_y = \frac{1}{2}\cdot\frac{2y}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

となりますから

$$\begin{aligned} xu_x + yu_y &= \frac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2}} + \frac{y^2}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ &= \frac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2}} = \sqrt{x^2+y^2} = u \end{aligned}$$

となりますから $u(x,y)$ は Euler の等式を満たすことが分かります．

(2)

$$u_x = \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}y^{\frac{2}{3}}, \quad u_y = \frac{2}{3}x^{\frac{1}{3}}y^{-\frac{1}{3}}$$

から

$$\begin{aligned} xu_x + yu_y &= \frac{1}{3}x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{2}{3}} + \frac{2}{3}x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{2}{3}} \\ &= x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{2}{3}} = u \end{aligned}$$

となりますから $u(x,y)$ は Euler の等式を満たすことが分かります．

VII $\alpha, \beta > 0$, $\rho > 0$ を定数として CES 関数を

$$Y = F(K,L) = (\alpha K^\rho + \beta L^\rho)^{\frac{1}{\rho}} \tag{17}$$

と定義します．**(1)** $\log F(K,L)$ を K, L で微分して $F_K(K,L)$, $F_L(K,L)$ を求めましょう．
(2) $F(K,L)$ が Euler の等式

$$K\cdot F_K(K,L) + L\cdot F_L(K,L) = F(K,L) \tag{18}$$

を満たすことを示しましょう．

解答 (1)

$$\log F(K,L) = \frac{1}{\sigma}\cdot\log\left(\alpha K^\sigma + \beta L^\sigma\right)$$

の両辺を K, L で偏微分すると

$$\frac{F_K(K,L)}{F(K,L)} = \frac{1}{\sigma}\cdot\frac{\sigma\alpha K^{\sigma-1}}{\alpha K^\sigma+\beta L^\sigma} = \frac{\alpha K^{\sigma-1}}{\alpha K^\sigma+\beta L^\sigma}$$
$$\frac{F_L(K,L)}{F(K,L)} = \frac{1}{\sigma}\cdot\frac{\sigma\beta L^{\sigma-1}}{\alpha K^\sigma+\beta L^\sigma} = \frac{\alpha L^{\sigma-1}}{\alpha K^\sigma+\beta L^\sigma}$$

となります．これから

$$F_K(K,L) = \frac{\alpha K^{\sigma-1}}{\alpha K^\sigma+\beta L^\sigma}\cdot F(K,L)$$
$$F_L(K,L) = \frac{\beta L^{\sigma-1}}{\alpha K^\sigma+\beta L^\sigma}\cdot F(K,L)$$

となります.

(2)(1) の最後の 2 式にそれぞれ K と L を掛けて加えると

$$K\cdot F_K(K,L)+L\cdot F_L(K,L) = \frac{\alpha K^\sigma+\beta L^\sigma}{\alpha K^\sigma+\beta L^\sigma}\cdot F(K,L) = F(K,L)$$

から $F(K,L)$ が Euler の等式を満たすことが分かります.

VIII(1) 要素需要関数 $x(p,q,r)$, $y(p,q,r)$ を求めた状況において

$$\begin{cases} rf_x(x(p,q,r),y(p,q,r)) & - & p & = & 0 & \cdots(1) \\ rf_y(x(p,q,r),y(p,q,r)) & - & q & = & 0 & \cdots(2) \end{cases}$$

の両辺を r で偏微分して $\frac{\partial x}{\partial r}$, $\frac{\partial y}{\partial r}$ を求めましょう.

(2)

$$z(p,q,r) := f(x(p,q,r),y(p,q,r))$$

に対して $\frac{\partial z}{\partial r}$ を求めて

$$\frac{\partial z}{\partial r} > 0$$

であることを示しましょう．ここでは任意の $\mathrm{P}\in\mathbf{R}^2_{++}$ に対して $f_x(P)\neq 0$ または $f_y(P)\neq 0$ が成立することを仮定します.

(3) $x(p,q,r)$, $y(p,q,r)$ が 0 次同次関数であることを Euler 方程式を用いて示しましょう.

(4) 問題 II における $x(p,q,r)$, $y(p,q,r)$ の価格弾力性を一般的に考えます.

$$\epsilon_{11}+\epsilon_{12}+\epsilon_{13}=0, \quad \epsilon_{21}+\epsilon_{22}+\epsilon_{23}=0$$

を示しましょう.

IX 生産関数 $f(x,y) = x^{\frac{1}{3}} y^{\frac{1}{3}}$ に対して要素需要関数 $x(p,q,r)$, $y(p,q,r)$ の価格弾力性を次のように定義します.

$$\epsilon_{11} = \frac{p}{x} \cdot \frac{\partial x}{\partial p} \qquad \epsilon_{12} = \frac{q}{x} \cdot \frac{\partial x}{\partial q} \qquad \epsilon_{13} = \frac{r}{x} \cdot \frac{\partial x}{\partial r}$$
$$\epsilon_{21} = \frac{p}{y} \cdot \frac{\partial y}{\partial p} \qquad \epsilon_{22} = \frac{q}{y} \cdot \frac{\partial y}{\partial q} \qquad \epsilon_{23} = \frac{r}{y} \cdot \frac{\partial y}{\partial r}$$

を計算しましょう.