

第 4 講義 05 月 25 日 演習問題解答

I $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ を対角化しましょう.

解答 A の固有多項式は

$$\begin{aligned} \Phi_A(\lambda) &= |\lambda I_2 - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & -2 \\ -3 & \lambda - 2 \end{vmatrix} \\ &= (\lambda - 1)(\lambda - 2) - 6 \\ &= \lambda^2 - 3\lambda - 4 = (\lambda + 1)(\lambda - 4) \end{aligned}$$

となるので、 A の固有値は $\lambda = -1, 4$ であることが分かります.

次に固有ベクトルを求めます.

$\lambda = -1$ のとき

$$\begin{aligned} A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= - \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \Leftrightarrow (-I_2 - A) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \vec{0} \\ &\Leftrightarrow \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ -3 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \vec{0} \\ &\Leftrightarrow x + y = 0 \end{aligned}$$

から

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y \\ y \end{pmatrix} = y \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (y \neq 0)$$

が固有ベクトルであることが分かります.

$\lambda = 4$ のとき

$$\begin{aligned} A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= 4 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \Leftrightarrow (4I_2 - A) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \vec{0} \\ &\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \vec{0} \\ &\Leftrightarrow 3x - 2y = 0 \end{aligned}$$

から

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ \frac{3}{2}x \end{pmatrix} = \frac{1}{2}x \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \quad (y \neq 0)$$

が固有ベクトルであることが分かります.

特に $\vec{p}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{p}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ を用いて $P = (\vec{p}_1 \ \vec{p}_2)$ とすると一般論から P は正則となり,

$$AP = (A\vec{p}_1 \ A\vec{p}_2) = (-\vec{p}_1 \ 4\vec{p}_2) = (\vec{p}_1 \ \vec{p}_2) \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$$

から A は

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$$

と対角化されます.

II

次の $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbf{R}^n$ に対して

$$L = \{x\vec{a} + y\vec{b}; x, y \in \mathbf{R}\}$$

を考えます. 条件

$$\|\vec{p}\| = \|\vec{q}\| = 1, (\vec{p}, \vec{q}) = 0$$

を満たす $\vec{p}, \vec{q} \in L$ を求めましょう.

$$(1) \vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad (2) \vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (3) \vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (4)$$

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

解答 (1) \vec{b} の \vec{a} 方向への直交射影 \vec{w} は

$$\vec{w} = \frac{(\vec{a}, \vec{b})}{\|\vec{a}\|^2} = \frac{2}{3}\vec{a}$$

と求められます. このとき \vec{a} の垂直なベクトルとして

$$\vec{b} - \vec{w} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} - \frac{2}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -5 \end{pmatrix}$$

が求まります. このとき \vec{a} と $\vec{b} - \vec{w}$ を正規化した

$$\vec{p} = \frac{1}{\|\vec{a}\|} \vec{a} = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{q} = \frac{1}{\|\vec{b} - \vec{w}\|} (\vec{b} - \vec{w}) = \frac{1}{\sqrt{42}} \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -5 \end{pmatrix}$$

が L の正規直交基底となります.

(2) \vec{b} の \vec{a} 方向への直交射影 \vec{w} は

$$\vec{w} = \frac{(\vec{a}, \vec{b})}{\|\vec{a}\|^2} = \frac{1}{2}\vec{a}$$

と求められます. このとき \vec{a} の垂直なベクトルとして

$$\vec{b} - \vec{w} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$$

が求まります. このとき \vec{a} と $\vec{b} - \vec{w}$ を正規化した

$$\vec{p} = \frac{1}{\|\vec{a}\|} \vec{a} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{q} = \frac{1}{\|\vec{b} - \vec{w}\|} (\vec{b} - \vec{w}) = \frac{1}{\sqrt{34}} \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$$

が L の正規直交基底となります。

(3) \vec{b} の \vec{a} 方向への直交射影 \vec{w} は

$$\vec{w} = \frac{(\vec{a}, \vec{b})}{\|\vec{a}\|^2} = -\frac{1}{4}\vec{a}$$

と求められます。このとき \vec{a} の垂直なベクトルとして

$$\vec{b} - \vec{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix}$$

が求まります。このとき \vec{a} と $\vec{b} - \vec{w}$ を正規化した

$$\vec{p} = \frac{1}{\|\vec{a}\|} \vec{a} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \vec{q} = \frac{1}{\|\vec{b} - \vec{w}\|} (\vec{b} - \vec{w}) = \frac{1}{\sqrt{44}} \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix}$$

が L の正規直交基底となります。

(4) \vec{b} の \vec{a} 方向への直交射影 \vec{w} は

$$\vec{w} = \frac{(\vec{a}, \vec{b})}{\|\vec{a}\|^2} = \frac{2}{4}\vec{a} = \frac{1}{2}\vec{a}$$

と求められます。このとき \vec{a} の垂直なベクトルとして

$$\vec{b} - \vec{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$$

が求まります。このとき \vec{a} と $\vec{b} - \vec{w}$ を正規化した

$$\vec{p} = \frac{1}{\|\vec{a}\|} \vec{a} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \vec{q} = \frac{1}{\|\vec{b} - \vec{w}\|} (\vec{b} - \vec{w}) = \frac{1}{\sqrt{20}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$$

が L の正規直交基底となります。

III (II の続き) XII の \vec{p}, \vec{q} を用いて

$$\|\vec{c} - x\vec{a} - y\vec{b}\|^2$$

を最小にする $x, y \in \mathbf{R}$ を求めましょう。

$$(1) \vec{c} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (2) \vec{c} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (3) \vec{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (4) \vec{c} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

解説 \vec{p}, \vec{q} と \vec{a}, \vec{b} の間に関係

$$\vec{p} = \frac{1}{\|\vec{a}\|} \vec{a}$$

$$\vec{q} = \frac{1}{\|\vec{b} - \vec{a}\|} \left(\vec{b} - \frac{(\vec{a}, \vec{b})}{\|\vec{a}\|^2} \vec{a} \right)$$

があることに注意しましょう。従って

$$(\vec{p} \ \vec{q}) = (\vec{a} \ \vec{b}) \begin{pmatrix} \frac{1}{\|\vec{a}\|} & -\frac{1}{\|\vec{b} - \vec{a}\|} \cdot \frac{(\vec{a}, \vec{b})}{\|\vec{a}\|^2} \\ 0 & \frac{1}{\|\vec{b} - \vec{a}\|} \end{pmatrix}$$

が成立します。この等式の右辺に現れる行列を S とすると S は正則となります。

$$\xi \vec{p} + \eta \vec{q} = (\vec{p} \ \vec{q}) \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} = (\vec{a} \ \vec{b}) S \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix}$$

$$= (\vec{a} \ \vec{b}) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

から

$$S \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad \text{従って} \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = S^{-1} \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix}$$

が成立します。以上から任意の $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^2$ に対して一意的に $\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^2$ が存在して

$$x\vec{a} + y\vec{b} = \xi\vec{p} + \eta\vec{q}$$

が成立します。ここで $\|\vec{c} - \vec{v}\|^2$ を最小とする $\vec{v} = x\vec{a} + y\vec{b} = \xi\vec{p} + \eta\vec{q} \in L$ を求めます。

$$\begin{aligned} \|\vec{c} - x\vec{a} - y\vec{b}\|^2 &= \|\vec{c} - \xi\vec{p} - \eta\vec{q}\|^2 \\ &= \|\vec{c}\|^2 + \xi^2\|\vec{p}\|^2 + \eta^2\|\vec{q}\|^2 - 2\xi(\vec{c}, \vec{p}) - 2\eta(\vec{c}, \vec{q}) \\ &= \|\vec{c}\|^2 + \xi^2 - 2\xi(\vec{c}, \vec{p}) + \eta^2\|\vec{q}\|^2 - 2\eta(\vec{c}, \vec{q}) \\ &= (\xi - (\vec{c}, \vec{p}))^2 + (\eta - (\vec{c}, \vec{q}))^2 + \|\vec{c}\|^2 - (\vec{c}, \vec{p})^2 - (\vec{c}, \vec{q})^2 \end{aligned}$$

から

$$\xi = (\vec{c}, \vec{p}), \quad \eta = (\vec{c}, \vec{q})$$

のとき $\|\vec{c} - \xi\vec{p} - \eta\vec{q}\|^2$ は最小となります。ここで求めた

$$\vec{v} = \vec{v}_0 = (\vec{c}, \vec{p})\vec{p} + (\vec{c}, \vec{q})\vec{q}$$

が

$$\vec{v}_0 \in L, \quad (\vec{c} - \vec{v}_0) \perp L$$

を満たす \vec{c} の L への直交射影となります。

解答

(1)

$$\vec{p} = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{q} = \frac{1}{\sqrt{42}} \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -5 \end{pmatrix}$$

であることがIで示されています。これから

$$(\vec{c}, \vec{p}) = \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right) = \frac{1}{\sqrt{3}}, \quad (\vec{c}, \vec{q}) = \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{42}} \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -5 \end{pmatrix} \right) = -\frac{5}{\sqrt{42}}$$

となります。このとき求める直交射影は

$$\begin{aligned} \vec{v}_0 &= x\vec{a} + y\vec{b} = (\vec{c}, \vec{p})\vec{p} + (\vec{c}, \vec{q})\vec{q} \\ &= \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{5}{\sqrt{42}} \frac{1}{\sqrt{42}} \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -5 \end{pmatrix} = \frac{1}{14} \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 13 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

となります。この式を直接 x と y について解くと

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & -\frac{2}{14} \\ 1 & 1 & \frac{3}{14} \\ 1 & -1 & \frac{13}{14} \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & -\frac{2}{14} \\ 0 & -1 & \frac{5}{14} \\ 0 & -3 & \frac{15}{14} \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & -\frac{2}{14} \\ 0 & 1 & -\frac{5}{14} \\ 0 & -3 & \frac{15}{14} \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & \frac{8}{14} \\ 0 & 1 & -\frac{5}{14} \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

から

$$x = \frac{4}{7}, \quad y = -\frac{5}{14}$$

であることが分かります。

注意 $S = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{3}{\sqrt{42}} \cdot \frac{2}{3} \\ 0 & \frac{3}{\sqrt{42}} \end{pmatrix}$ を用いて

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{2}{\sqrt{42}} \\ 0 & \frac{3}{\sqrt{42}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{5}{\sqrt{42}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{4}{7} \\ -\frac{5}{14} \end{pmatrix}$$

とも計算ができます。

(2)

$$\vec{p} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \vec{q} = \frac{1}{\sqrt{34}} \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$$

であることがIで示されています。これから

$$(\vec{c}, \vec{p}) = \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right) = -\frac{1}{\sqrt{2}}, \quad (\vec{c}, \vec{q}) = \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{34}} \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} \right) = \frac{3}{\sqrt{34}}$$

となります。このとき求める直交射影は

$$\begin{aligned} \vec{v}_0 &= x\vec{a} + y\vec{b} = (\vec{c}, \vec{p})\vec{p} + (\vec{c}, \vec{q})\vec{q} \\ &= -\frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \frac{3}{\sqrt{34}} \frac{1}{\sqrt{34}} \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} = \frac{1}{17} \begin{pmatrix} -4 \\ 6 \\ 13 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

となります。この式を直接 x と y について解くと

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & -\frac{4}{17} \\ 0 & 2 & \frac{6}{17} \\ -1 & 1 & \frac{13}{17} \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & -\frac{4}{17} \\ 0 & 2 & \frac{6}{17} \\ 0 & 3 & \frac{9}{17} \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & -\frac{4}{17} \\ 0 & 1 & \frac{3}{17} \\ 0 & 3 & \frac{9}{17} \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & -\frac{2}{17} \\ 0 & 1 & \frac{3}{17} \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

から

$$x = -\frac{20}{17}, \quad y = \frac{3}{17}$$

であることが分かります。

注意 $S = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{2}{\sqrt{34}} \cdot \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{34}} \end{pmatrix}$ を用いて

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{34}} \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{34}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{3}{\sqrt{34}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{20}{17} \\ \frac{3}{17} \end{pmatrix}$$

とも計算ができます。

(3)

$$\vec{p} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \vec{q} = \frac{1}{\sqrt{44}} \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix}$$

であることが I で示されています。これから

$$(\vec{c}, \vec{p}) = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right) = \frac{1}{2}, \quad (\vec{c}, \vec{q}) = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{44}} \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix} \right) = \frac{5}{\sqrt{44}}$$

となります。このとき求める直交射影は

$$\begin{aligned} \vec{v}_0 &= x\vec{a} + y\vec{b} = (\vec{c}, \vec{p})\vec{p} + (\vec{c}, \vec{q})\vec{q} \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \frac{5}{\sqrt{44}} \cdot \frac{1}{\sqrt{44}} \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix} = \frac{1}{11} \begin{pmatrix} 9 \\ 4 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

となります。この式を直接 x と y について解くと

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & \frac{9}{11} \\ 1 & 0 & \frac{4}{11} \\ 1 & -1 & -\frac{1}{11} \\ -1 & 1 & \frac{1}{11} \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 0 & 1 & \frac{5}{11} \\ 1 & 0 & \frac{4}{11} \\ 0 & 1 & -\frac{5}{11} \\ 0 & -1 & \frac{5}{11} \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & \frac{4}{11} \\ 0 & 1 & \frac{5}{11} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

から

$$x = \frac{4}{11}, \quad y = \frac{5}{11}$$

であることが分かります。

注意 $S = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{4}{\sqrt{44}} \cdot (-\frac{1}{4}) \\ 0 & \frac{4}{\sqrt{44}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{\sqrt{44}} \\ 0 & \frac{4}{\sqrt{44}} \end{pmatrix}$ を用いて

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{\sqrt{44}} \\ 0 & \frac{4}{\sqrt{44}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{5}{\sqrt{44}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{4}{11} \\ \frac{5}{11} \end{pmatrix}$$

とも計算ができます。

(4)

$$\vec{p} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \vec{q} = \frac{1}{\sqrt{20}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$$

であることがIで示されています。これから

$$(\vec{c}, \vec{p}) = \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right) = -\frac{1}{2}, \quad (\vec{c}, \vec{q}) = \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{20}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} \right) = \frac{3}{\sqrt{20}}$$

のとき最小値をとります。このとき求める直交射影は

$$\begin{aligned} \vec{v}_0 &= x\vec{a} + y\vec{b} = (\vec{c}, \vec{p})\vec{p} + (\vec{c}, \vec{q})\vec{q} \\ &= -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \frac{3}{\sqrt{20}} \frac{1}{\sqrt{20}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} = \frac{1}{10} \begin{pmatrix} -1 \\ -4 \\ 2 \\ 7 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

となります。この式を直接 x と y について解くと

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & -\frac{1}{10} \\ 1 & 0 & -\frac{4}{10} \\ 1 & 2 & \frac{2}{10} \\ -1 & 1 & \frac{7}{10} \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 0 & 1 & \frac{3}{10} \\ 1 & 0 & -\frac{4}{10} \\ 0 & 2 & \frac{6}{10} \\ 0 & 1 & \frac{3}{10} \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & -\frac{4}{10} \\ 0 & 1 & \frac{3}{10} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

から

$$x = -\frac{4}{10}, \quad y = \frac{3}{10}$$

であることが分かります。

注意 $S = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{2}{\sqrt{20}} \cdot \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{20}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{\sqrt{20}} \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{20}} \end{pmatrix}$ を用いて

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{\sqrt{20}} \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{20}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{4}{10} \\ \frac{3}{10} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{4}{10} \\ \frac{3}{10} \end{pmatrix}$$

とも計算ができます。

IV $R \in M_2(\mathbf{R})$ が回転行列ならば $R^{-1} = {}^t R$ であることを示しましょう。

解答 $R = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$ とします。このとき $|R| = \cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1 \neq 0$ から

$$R^{-1} = \frac{1}{1} \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} = {}^t R$$

であることが分かります。

V

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \vec{g} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

とします.

(1) $(\vec{a}, \vec{b}) = 0$ であることを示しましょう.

(2) $\|\vec{g} - x\vec{a} - y\vec{b}\|^2$ を最小にする x, y を求めましょう.

解答 (1)

$$(\vec{a}, \vec{b}) = 1 \cdot 2 + 1 \cdot (-1) + 1 \cdot (-1) = 2 - 1 - 1 = 0$$

(2)

$$\begin{aligned} \|\vec{g} - x\vec{a} - y\vec{b}\|^2 &= \|\vec{g}\|^2 - 2(\vec{g}, x\vec{a} + y\vec{b}) + \|x\vec{a} + y\vec{b}\|^2 \\ &= \|\vec{g}\|^2 - 2x(\vec{g}, \vec{a}) - 2y(\vec{g}, \vec{b}) + \|x\vec{a}\|^2 + 2(x\vec{a}, y\vec{b}) + \|y\vec{b}\|^2 \\ &= \|\vec{g}\|^2 - 2x(\vec{g}, \vec{a}) - 2y(\vec{g}, \vec{b}) + x^2\|\vec{a}\|^2 + 2xy(\vec{a}, \vec{b}) + y^2\|\vec{b}\|^2 \\ &= 1^2 - 2x \cdot 1 - 2y(-1) + x^2 \cdot 3 + 2xy \cdot 0 + y^2 \cdot 6 \\ &= 3x^2 - 2x + 6y^2 + 2y + 1 \\ &= 3\left(x - \frac{1}{3}\right)^2 + 6\left(y + \frac{1}{6}\right)^2 + 1 - \frac{1}{3} - \frac{1}{6} \\ &= 3\left(x - \frac{1}{3}\right)^2 + 6\left(y + \frac{1}{6}\right)^2 + \frac{1}{2} \end{aligned}$$

から $x = \frac{1}{3}$, $y = -\frac{1}{6}$ のとき最小値 $\frac{1}{2}$ を取ります.

VI 次の行列の積を計算しましょう。(計算の意味を考えてみましょう.)

$$\begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \beta & \sin \beta \\ \sin \beta & -\cos \beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \alpha - \sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}$$

解答

$$\begin{aligned} &\begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \beta & \sin \beta \\ \sin \beta & -\cos \beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \alpha - \sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos \alpha \sin \beta + \sin \alpha \sin \beta & \cos \alpha \sin \beta - \sin \alpha \cos \beta \\ -\sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta & -\sin \alpha \sin \beta - \cos \alpha \cos \beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \alpha - \sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos(\beta - \alpha) & \sin(\beta - \alpha) \\ \sin(\beta - \alpha) & -\cos(\beta - \alpha) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \alpha - \sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos(\beta - \alpha) \cos \alpha + \sin(\beta - \alpha) \sin \alpha & -\cos(\beta - \alpha) \sin \alpha + \sin(\beta - \alpha) \cos \alpha \\ \sin(\beta - \alpha) \cos \alpha - \cos(\beta - \alpha) \sin \alpha & -\sin(\beta - \alpha) \sin \alpha - \cos(\beta - \alpha) \cos \alpha \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos(\beta - 2\alpha) & \sin(\beta - 2\alpha) \\ \sin(\beta - 2\alpha) & -\cos(\beta - 2\alpha) \end{pmatrix} \end{aligned}$$