偏微分係数と極大・極小の必要条件

Intro 2020 L01, Part 1–Part 4

Nobuyuki TOSE

May 04, 2020

プラン

Part 01

ミクロ経済学における基本的な問題

ミクロ経済学における基本的な問題

ミクロ経済学では最初に以下の基本的な問題を学びます.

- 生産理論 (Production Theory)
- 消費者理論 (Consumer Theory)

生産理論（Production Theory）

生産物 (product)C が**生産要素** (production elements) A,B から生産されるとします．A, B, C の価格はそれぞれ p, q, r とします．A と B をそれぞれ x と y 投入するとき C が $z = f(x, y)$ 得られるとします．
このとき $f(x, y)$ を**生産関数** (production function) と呼ばれます．またこの状況で**利潤関数** (profit function) を

$$\pi(x, y) = rf(x, y) - px - qy$$

と定義します．
生産理論の最初のステップは，利潤関数 $\pi(x, y)$ を最大化して**生産要素需要関数**

$$x = x(p, q, r), y = y(p, q, r)$$

を求めることにあります．

消費者理論（Consumer Theory）

商品 (Goods) A,B があるとします．A を x, B を y 購入するとき，消費者が**効用関数** (utility function)$u(x, y)$ の効用を得るとします．さらに A, B の価格が p, q であるとします．
消費者が予算 I を全額消費して A,B を購入するとします．ここでの問題は**予算制約**と呼ばれる制約条件

$$I - px - qy = 0$$

の下で $u(x, y)$ を最大化して**需要関数** (demand function)

$$x = x(p, q, I), y = y(p, q, I)$$

と**所得の限界効用** (mariginal utility of income)

$$\lambda = \lambda(p, q, I)$$

を得ることです．

Part 02
開集合

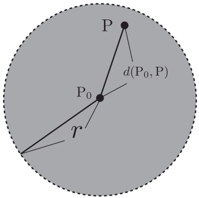
開円盤 CT 246p

開円盤 (Open Disc)

$r > 0$, $\mathrm{P}_0(a, b) \in \mathbf{R}^2$ に対して

$$B_r(\mathrm{P}_0) := \{\mathrm{P} \in \mathbf{R}^2;\ d(\mathrm{P}, \mathrm{P}_0) < r\}$$

を中心 P_0, 半径 $r > 0$ の**開円盤**と呼びます．ここで $d(\mathrm{P}_0, \mathrm{P})$ は 2 点 P_0, P の距離です．$\mathrm{P}(x, y)$ のとき



$$d(\mathrm{P}_0, \mathrm{P}) = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2}$$

注意今後「P_0 の近くで〜」という言い方をしますが，これはある正数 $r > 0$ に対して

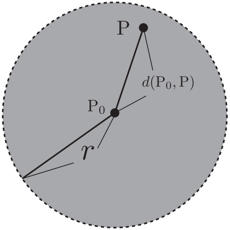
$$任意の\mathrm{P} \in B_r(\mathrm{P}_0)において〜$$

Definition

$\mathbf{R}^2$ の部分集合 U があるとします．U が開集合であるとは任意の $\mathrm{P}_0 \in U$ に対して $r > 0$ が存在して

$$B_r(\mathrm{P}_0) := \{\mathrm{P} \in \mathbf{R}^2;\ d(\mathrm{P}, \mathrm{P}_0) < r\} \subset U$$

が成立することです．



注意 U の任意の点 P_0 の周りが U に含まれているということです．

命題・命題関数

命題とは真偽が明らかな文のことです．例えば

$$2 > 1 \quad \text{真（Truth）}$$
$$1 > 2 \quad \text{偽（False）}$$

集合 X 上の**命題関数**とは $x \in X$ に対して命題 $P(x)$ を対応させるものです．例えば $X = \mathbf{R}$ のとき

$$P(x): \quad 1 < x$$

と定めると

$$P(0): \quad 1 < 0 \quad \text{偽}$$
$$P(2): \quad 1 < 2 \quad \text{真}$$

となります．

命題関数 (2)

集合 X 上の命題関数 $P(x)$ があるとき付随して命題を定めることができます.

$$\forall x \in X\,(P(x))$$

はすべての $x \in X$ に対して $P(x)$ が真であるという命題です．前ページの例では $P(0)$ が偽ですから $\forall x \in X\,(P(x))$ は偽です.
さらに

$$\exists x \in X\,(P(x))$$

はある $x \in X$ に対して $P(x)$ が真であるという命題です．前ページの例では $P(2)$ が真ですから $\exists x \in X\,(P(x))$ は真です.

開集合の例

以下の $\mathbf{R}^2$ の部分集合は開集合です.

- $\mathbf{R}^2$
- 上半平面
$$U_1 := \{(x, y) \in \mathbf{R}^2;\ y > 0\}$$
- 第 1 象限（1st Quadrant）
$$\mathbf{R}^2_{++} := \{(x, y) \in \mathbf{R}^2;\ x, y > 0\}$$
- 開円盤
$$B_r(\mathrm{P}_0) := \{\mathrm{P} \in \mathbf{R}^2;\ d(\mathrm{P}, \mathrm{P}_0) < r\}$$

開集合–反例

以下の $\mathbf{R}^2$ の部分集合は開集合ではありません．

- $\mathrm{P}_0 \in \mathbf{R}^2$ のなす集合 $\{\mathrm{P}_0\}$
- 閉上半平面

$$F_1 := \{(x, y) \in \mathbf{R}^2;\ y \geq 0\}$$

- 閉第 1 象限

$$\overline{\mathbf{R}^2_{++}} := \{(x, y)\mathbf{R}^2;\ x, y \geq 0\}$$

- 閉円盤

$$\overline{B_r(\mathrm{P}_0)} := \{\mathrm{P} \in \mathbf{R}^2;\ d(\mathrm{P}, \mathrm{P}_0) \leq r\}$$

Part 03
偏微分係数と極大・極小

Partial Differentiation

$\mathbf{R}^2$ の開集合 U 上の関数

$$f:\ U \to \mathbf{R}$$

が定義されているとします.

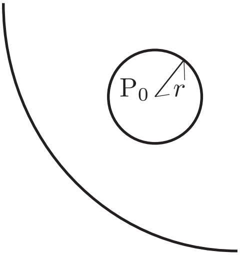
$\mathrm{P}_0(a,b) \in U$ に対して x の関数

$$F(x) := f(x,b)$$

を $x=a$ の近くで定義できます. さらに y の関数

$$G(y) := f(a,y)$$

を $y=b$ の近くで定義することができます.



この状況で，定義の中の極限が存在すれば，x と y に関する**偏微分係数**を

$$f_x(a,b) := F'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x,b) - f(a,b)}{x - a}$$

$$f_y(a,b) := G'(b) = \lim_{y \to b} \frac{f(a,y) - f(a,b)}{y - b}$$

と定義できます.

Partial Differentiation-An example

$\mathbf{R}^2$ 上の関数

$$f(x,y) = x^3 + 2xy^2 + y^3$$

について考えます．$(a,b) \in \mathbf{R}^2$ の周りで考えるとして

$$F(x) := f(x,b) = x^3 + 2xb^2 + b^3, \;\; G(y) := f(a,y) = a^3 + 2ay^2 + y^3$$

と定義します．このとき

$$F'(x) = 3x^2 + 2b^2, \quad \text{and} \quad G'(y) = 4ay + 3y^2$$

から

$$f_x(a,b) = 3a^2 + 2b^2, \quad f_y(a,b) = 4ab + 3b^2$$

を得ます．

1 変数の極大点（極小点）–定義

開区間 $]a, b[$ 上の関数 $f :]a, b[\Rightarrow \mathbf{R}$ が与えられているとき

f が $t = c$ で極小（resp. 極大）
$\Leftrightarrow$ ある $\delta > 0$ に対して f が $]c - \delta, c + \delta[$ 上最小（resp. 最大）
$\Leftrightarrow$ ある $\delta > 0$ に対して

$$f(t) \geq f(c) \quad (c - \delta < t < c + \delta)$$

$$\text{resp.} f(t) \leq f(c) \quad (c - \delta < t < c + \delta)$$

1 変数の極大点（極小点）CT 104-105p

微分可能な 1 変数関数の極小点（極大点）に関する次の定理を紹介します.

Theorem

微分可能な関数 $f :]a, b[\to \mathbf{R}$ があるとします. f が $c \in]a, b[$ で極小（極大）ならば

$$f'(c) = 0$$

注意 これは中身を理解して欲しい定理です.

Minimal (Maximal) Points CT 268p

$\mathbf{R}^2$ の開集合 U 上の関数

$$f:\ U \to \mathbf{R}$$

に対して，f が $\mathrm{P}_0(a,b)$ で極小（resp. 極大）であるとはある $\delta > 0$ が存在して

$$f(x,y) \geq f(a,b) \quad ((x,y) \in B_\delta(\mathrm{P}_0))$$

(resp.

$$f(x,y) \leq f(a,b) \quad ((x,y) \in B_\delta(\mathrm{P}_0))$$

)
が成立するときです.

$\mathbf{R}^2$ の開集合 U 上の関数

$$f: U \to \mathbf{R}$$

が U の各点 $\mathrm{P} \in U$ で x, y について偏微分できると仮定します.

Theorem

f が $\mathrm{P}_0(a, b) \in U$ で極小（極大）ならば

$$f_x(a, b) = f_y(a, b) = 0 \tag{1}$$

が成立します.

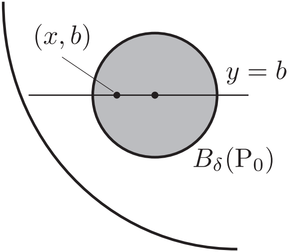
この状況で (**??**) を満たす点 $\mathrm{P}_0(a, b)$ を f の**停留点**と呼びます.

Minimal (Maximal) Points–Sketch of proof

f が $\mathrm{P}_0(a, b)$ で極小とします．このとき $F(x) = f(x, b)$ は $x = a$ で極小となります．実際

$$f(x, y) \geq f(a, b) \quad ((x, y) \in B_\delta(\mathrm{P}_0))$$

から $f(x, b) \geq f(a, b) \quad (a - \delta < x < a + \delta)$
従って



$$F(x) \geq F(a) \quad (a - \delta < x < a + \delta)$$

となります．よって

$$F'(a) = 0 \quad 従って \quad f_x(a, b) = 0$$

であることが分かります．

Minimal (Maximal) Points–An example

関数

$$f(x,y) = x^2 + 4xy + 2y^2 - 6x - 8y$$

について考えます.

$$\begin{aligned} f_x(x,y) &= 2x + 4y \cdot 1 + 0 - 6 - 0 \\ &= 2x + 4y - 6 = 0 \\ f_y(x,y) &= 0 + 4x \cdot 1 + 4y - 0 - 8 \\ &= 4x + 4y - 8 = 0 \end{aligned}$$

を解くと，$(x,y) = (1,1)$ が f の唯一の停留点であることが分かります.

Part 04
クラメールの公式

クラメールの公式 CT 205-206p

連立 1 次方程式

$$\begin{cases} ax + by = \alpha & \cdots(1) \\ cx + dy = \beta & \cdots(2) \end{cases}$$

を考える． y を消去するために $(1) \times d - (2) \times b$ を考える．

$$\begin{array}{rccccc} & adx & + & bdy & = & \alpha d \\ -) & bcx & + & bdy & = & \beta b \\ \hline & (ad-bc)x & & & = & \alpha d - \beta b \end{array}$$

x を消去するために $(1) \times c - (2) \times a$ を考える．

$$\begin{array}{rccccc} & acx & + & bcy & = & \alpha c \\ -) & acx & + & ady & = & \beta a \\ \hline & & & (bc-ad)y & = & \alpha c - \beta a \end{array}$$

行列式・クラメールの公式

行列式

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

これを用いると

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} x = \begin{vmatrix} \alpha & b \\ \beta & d \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} y = \begin{vmatrix} a & \alpha \\ c & \beta \end{vmatrix}$$

特に $D := \left|\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right| \neq 0$ のとき

$$x = \frac{1}{D} \begin{vmatrix} \alpha & b \\ \beta & d \end{vmatrix}, \quad y = \frac{1}{D} \begin{vmatrix} a & \alpha \\ c & \beta \end{vmatrix}$$

これを**クラメールの公式**と言います.

クラメールの公式–例

$$\begin{cases} 2x & + & 4y & = & 6 \\ 4x & + & 4y & = & 8 \end{cases}$$

を解きます.

$$D = \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 4 \end{vmatrix} = 2 \cdot 4 - 4 \cdot 4 = -8 \neq 0$$

からクラメールの公式が適用できます．実際

$$x = -\frac{1}{8}\begin{vmatrix} 6 & 4 \\ 8 & 4 \end{vmatrix} = -\frac{1}{8}(6 \cdot 4 - 8 \cdot 4) = -\frac{1}{8}(-8) = 1$$

$$y = -\frac{1}{8}\begin{vmatrix} 2 & 6 \\ 4 & 8 \end{vmatrix} = -\frac{1}{8}(2 \cdot 8 - 4 \cdot 6) = -\frac{1}{8}(-8) = 1$$