ベクトルの平行.

I 2次元　$\vec{a}=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\end{pmatrix}$, $\vec{b}=\begin{pmatrix}b_1\\b_2\end{pmatrix}$

$$\vec{a}\nparallel\vec{b} \iff \left(\lambda\vec{a}+\mu\vec{b}=\vec{0} \Rightarrow \lambda=\mu=0\right)$$

$$\vec{a}\parallel\vec{b} \iff \exists\begin{pmatrix}\lambda\\\mu\end{pmatrix}\neq\vec{0}\quad \lambda\vec{a}+\mu\vec{b}=\vec{0}$$

言い換え

$\vec{a}\nparallel\vec{b} \iff |\vec{a}\ \vec{b}|\neq 0 \iff (\vec{a}\ \vec{b})$ は正則

$\vec{a}\parallel\vec{b} \iff |\vec{a}\ \vec{b}|=0 \iff (\vec{a}\ \vec{b})$ は正則でない

Aが2×2行列のとき

A:正則 $\iff \left(A\vec{v}=\vec{0} \Rightarrow \vec{v}=\vec{0}\right) \iff |A|\neq 0$

A:正則でない $\iff \exists\vec{v}\neq\vec{0}\ \ A\vec{v}=\vec{0} \iff |A|=0$

Ⅱ 3次元. $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$

$$\vec{a} \nparallel \vec{b} \iff \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0 \ \text{OR} \ \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} \neq 0 \ \text{OR} \ \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} \neq 0$$

$$\vec{a} \parallel \vec{b} \iff \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} = 0$$

ベクトル積

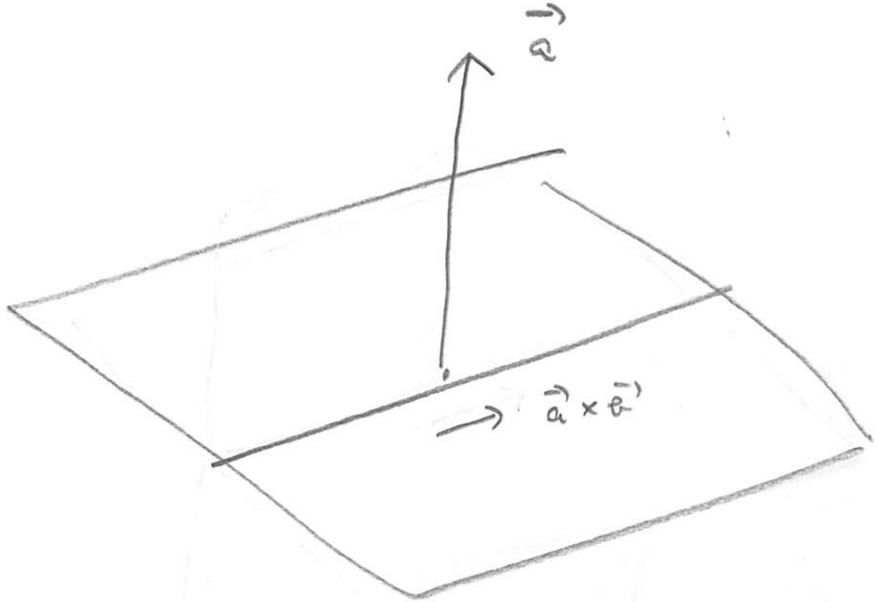
$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \end{pmatrix}$$

$$\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0} \iff \vec{a} \parallel \vec{b}$$

$$\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0} \iff \vec{a} \nparallel \vec{b}$$

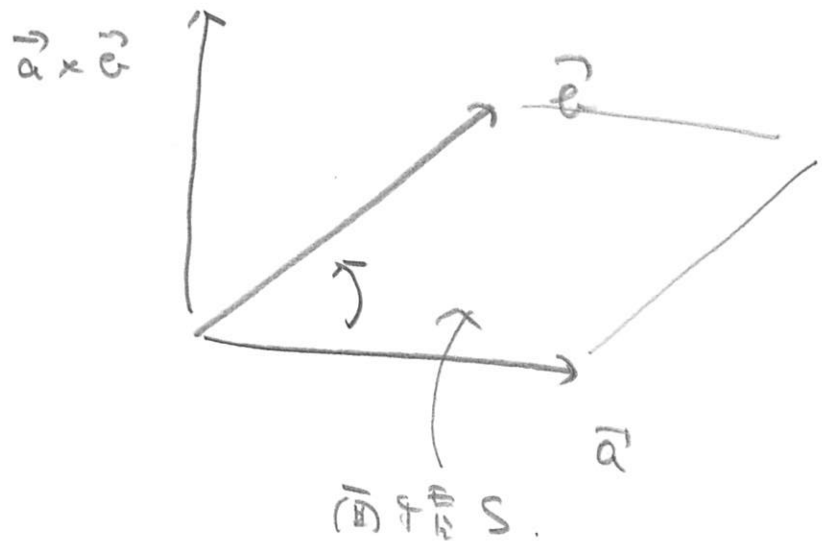
ベクトル積の性質

$$\vec{a} \perp \vec{a} \times \vec{b}, \quad \vec{b} \perp \vec{a} \times \vec{b}$$



$$\|\vec{a}\times\vec{b}\| = S$$

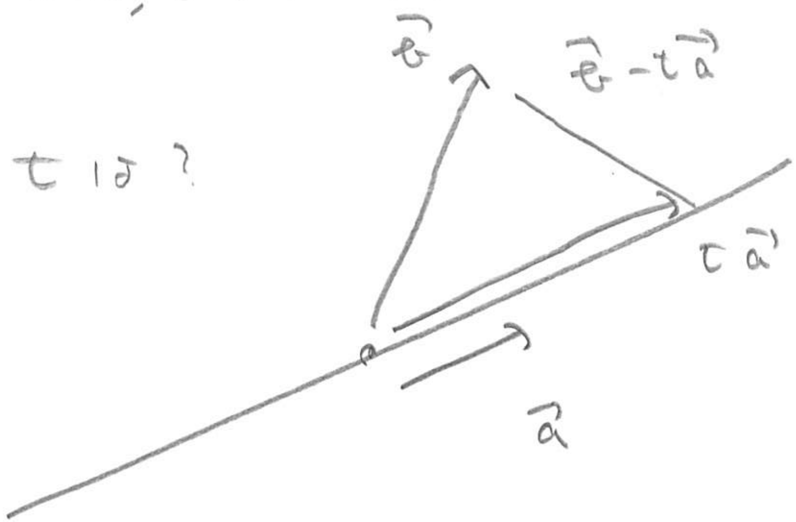
については第5回以降で



ベクトルの内積

$\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^n$

$$\|\vec{a} \pm \vec{b}\|^2 = \|\vec{a}\|^2 \pm 2(\vec{a}, \vec{b}) + \|\vec{b}\|^2$$



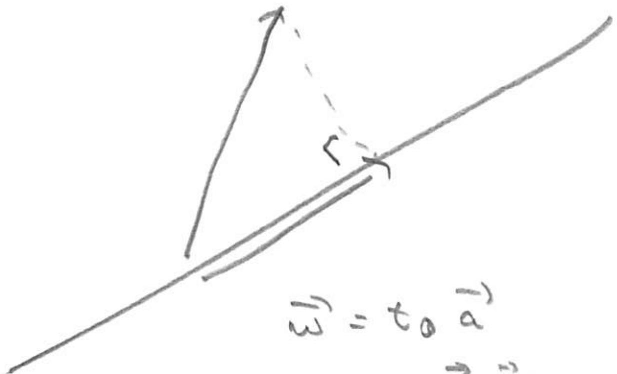
問　$\|\vec{b} - t\vec{a}\|^2$ を最小にする t は？

$\vec{a} \neq \vec{0}$ のとき

$$t = t_0 := \frac{(\vec{a}, \vec{b})}{\|\vec{a}\|^2}$$

このとき $\vec{w} = t_0 \vec{a} = \dfrac{(\vec{a}, \vec{b})}{\|\vec{a}\|^2} \vec{a}$

$$\vec{b} - \vec{w} \perp \vec{a}$$



$$\vec{w} = t_0 \vec{a} = \frac{(\vec{a}, \vec{b})}{\|\vec{a}\|^2} \vec{a}$$

$\vec{w}$ を $\vec{b}$ の $\vec{a}$ 方向への直交射影と呼ぶ。

$\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^n$

$$F : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^n$$
$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \longmapsto x\vec{a} + y\vec{b} = (\vec{a}\ \vec{b})\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

線形性

$$F(\lambda\vec{v} + \mu\vec{w}) = \lambda F(\vec{v}) + \mu F(\vec{w})$$
$$\Updownarrow$$
$$(\vec{a}\ \vec{b})(\lambda\vec{v} + \mu\vec{w}) = \lambda(\vec{a}\ \vec{b})\vec{v} + \mu(\vec{a}\ \vec{b})\vec{w}$$

$\vec{p}, \vec{q} \in \mathbb{R}^2$

$$G : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$
$$\begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix} \longmapsto s\vec{p} + t\vec{p} = (\vec{p}\ \vec{q})\begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix}$$

$$\begin{tikzcd} \mathbb{R}^2 \arrow[r, "G"] \arrow[rr, bend right, "F \circ G"'] & \mathbb{R}^2 \arrow[r, "F"] & \mathbb{R}^n \end{tikzcd}$$

$$\Big((\vec{a}\ \vec{b})(\vec{p}\ \vec{q})\Big)\begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix}$$
$$\parallel$$

$$(F \circ G)\begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix} = F\left(G\left(\begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix}\right)\right) = F(s\vec{p} + t\vec{q})$$

線形

$$= sF(\vec{p}) + tF(\vec{q}) = \Big(F(\vec{p})\ \ F(\vec{q})\Big)\begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix} = \Big((\vec{a}\ \vec{b})\vec{p}\ \ (\vec{a}\ \vec{b})\vec{q}\Big)\begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix}$$