$\alpha \neq \beta,\ \beta \neq \gamma,\ \gamma \neq \alpha \quad \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{K}.$

$A \in M_3(\mathbb{K})$ のとき

3 次正方行列の対角化

Nobuyuki TOSE

V003 intro L03, emath L03 2020

$\to$ ① $\Phi_A(\lambda) = (\lambda - \alpha)(\lambda - \beta)(\lambda - \gamma)$

② $\Phi_A(\lambda) = (\lambda - \alpha)^2(\lambda - \beta)$

③ $\Phi_A(\lambda) = (\lambda - \alpha)^3$ — 対角化できる場合簡単.

対角化可能の十分条件

定理 1

3 次正方行列 $A \in M_3(\mathbf{K})$ の固有多項式

$$\Phi_A(\lambda) = (\lambda - \alpha)(\lambda - \beta)(\lambda - \gamma)$$

が条件

$$\alpha, \beta, \gamma \in \mathbf{K}, \quad \underline{\alpha \neq \beta, \beta \neq \gamma, \gamma \neq \alpha}$$

を満たすとします．このとき<u>正則な</u>$P \in M_3(\mathbf{K})$ が存在して

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \alpha & & \\ & \beta & \\ & & \gamma \end{pmatrix}$$

と対角化されます．

対角化可能の十分条件（証明）

$\Phi_A(\alpha) = \Phi_A(\beta) = \Phi_A(\gamma) = 0$

$$\to \quad A\vec{p}_1 = \alpha\vec{p}_1,\ A\vec{p}_1 = \beta\vec{p}_2,\ A\vec{p}_1 = \gamma\vec{p}_3$$
$$\vec{p}_j \neq \vec{0} \quad (j = 1, 2, 3)$$

を満たす $\vec{p}_1, \vec{p}_2, \vec{p}_3 \in \mathbf{K}^3$ が存在します．次の定理 2 を用いると $P = (\vec{p}_1\ \vec{p}_2\ \vec{p}_3)$ は正則となります．さらに

$\Updownarrow$ $\vec{p}_1, \vec{p}_2, \vec{p}_3$ は線型独立.

$$AP = A(\vec{p}_1\ \vec{p}_2\ \vec{p}_3) = (A\vec{p}_1\ A\vec{p}_2\ A\vec{p}_3) = (\alpha\vec{p}_1\ \beta\vec{p}_2\ \gamma\vec{p}_3)$$
$$= (\vec{p}_1\ \vec{p}_2\ \vec{p}_3)\begin{pmatrix}\alpha & & \\ & \beta & \\ & & \gamma\end{pmatrix} = P\begin{pmatrix}\alpha & & \\ & \beta & \\ & & \gamma\end{pmatrix}$$

から $P^{-1}\cdot$

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix}\alpha & & \\ & \beta & \\ & & \gamma\end{pmatrix}$$

$\ell=2$ の場合

$\ell=3$ の場合は示している．

定理 2

$A \in M_n(\mathbf{K})$, $\alpha_1, \ldots \alpha_\ell \in \mathbf{K}$, $\vec{p}_1, \ldots, \vec{p}_\ell \in \mathbf{K}^n$ が条件

$$\alpha_i \neq \alpha_j \quad (i \neq j)$$

$$A\vec{p}_j = \alpha_j \vec{p}_j,\ \vec{p}_j \neq \vec{0} \quad (j = 1, \ldots, \ell)$$

を満たすとします．このとき $\vec{p}_1, \ldots, \vec{p}_\ell$ は線型独立となります．

$j=\ell$ $(A-\alpha_\ell I_n)\vec{p}_\ell=\vec{0}$

$j=\ell$

$\vec{p}_\ell \neq \vec{0}$

対角化可能の十分条件（証明）

$\ell = 2, 3.$

定理 2 の証明 ℓ に関する帰納法で証明します．$\ell = 1$ の場合は簡単です．一般の ℓ の場合を考えます．そのために $\vec{p}_1, \ldots, \vec{p}_\ell$ が

$(A - \alpha_\ell I_\ell)\vec{p}_1 = \alpha_1 \vec{p}_1 - \alpha_\ell \vec{p}_1$

$$c_1\vec{p}_1 + \cdots + c_{\ell-1}\vec{p}_{\ell-1} + c_\ell\vec{p}_\ell = \vec{0} \tag{1}$$

$\to c_1 = \cdots = c_{\ell-1} = c_\ell = 0$

を満たすとします．(1) の両辺に $A - \alpha_\ell I_n$ を掛けると $\to \vec{0}$

$$c_1(\alpha_1 - \alpha_\ell)\vec{p}_1 + \cdots + c_{\ell-1}(\alpha_{\ell-1} - \alpha_\ell)\vec{p}_{\ell-1} = \vec{0} \tag{2}$$

となります．帰納法の仮定から $\vec{p}_1, \ldots, \vec{p}_{\ell-1}$ は線型独立になります．従って (2) から

$\neq 0$ $\neq 0$

$$c_1(\alpha_1 - \alpha_\ell) = \cdots = c_{\ell-1}(\alpha_{\ell-1} - \alpha_\ell) = 0 \quad 従って \quad c_1 = \ldots = c_{\ell-1} = 0 \tag{3}$$

となります．(1) に代入すると $c_\ell\vec{p}_\ell = \vec{0}$ となりますが，これから $c_\ell = 0$ も従います．

$\vec{p}_\ell \neq \vec{0}$

具体例 (1)—固有多項式が重根を持つ場合

3 次正方行列

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

の固有多項式と固有空間は

$$\Phi_A(\lambda) = (\lambda - 1)(\lambda - 3)^2$$

$$V(1) = \mathbf{R}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad V(3) = \underset{\mathbb{R}}{\cancel{\mathbf{K}}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \underset{\mathbb{R}}{\cancel{\mathbf{K}}}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

であった.

$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ と $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\lambda = 3$ が $\Phi_A(\lambda)$ の重根.

2次元.

$= \left\{ c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} ; c_1, c_2 \in \mathbb{R} \right\}$

$= LC\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$

具体例 (2)—固有多項式が重根を持つ場合

$V(1)$ $V(3)$ $V(3)$

$p_1 \nparallel p_2$, $V(1) \oplus V(3)$ ↑ 直和

$$\vec{p}_1 \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{p}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{p}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad P = (\vec{p}_1 \ \vec{p}_2 \ \vec{p}_3)$$

とすると P は正則である．これを用いると：

確認すること．

固有空間分解 スペクトル

p_1, p_2, p_3 が 線形独立

$$\mathbb{K}^3 = V(1) \oplus V(3)$$

実際，任意の $\vec{v} \in \mathbb{K}^3$ に対して $\vec{c} = P^{-1}\vec{v}$ と定めると $= \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}$

$$\vec{v} = PP^{-1}\vec{v} = P\vec{c} = c_1\vec{p}_1 + c_2\vec{p}_2 + c_3\vec{p}_3 \in V(1) \oplus V(3)$$

から

$$\mathbb{K}^3 \subset V(1) \oplus V(3)$$

$\mathbb{R}^3 \supset$ 明らか．

$\subset$ かつ $\supset$

$f_1(1)=1,\ f_1(3)=0$

$f_2(3)=1,\ f_2(1)=0$

以上で任意の $\vec{v} \in \mathbf{R}^3$ に対して $\vec{v}_1 \in V(1)$, $\vec{v}_2 \in V(3)$ が存在して

$$\vec{v} = \vec{v}_1 + \vec{v}_2$$

と一意的に表されます．このとき

$$f_1(\lambda) = \frac{\lambda-3}{1-3} = -\frac{1}{2}(\lambda-3), \quad f_2(\lambda) = \frac{\lambda-1}{3-1} = \frac{1}{2}(\lambda-1)$$

とすると

$(\vec{v}_1 - 3\vec{v}_1) = -2\vec{v}_1$

$$\vec{v}_1 = f_1(A)\vec{v} = -\frac{1}{2}(A-3I_3)\vec{v}, \quad \vec{v}_2 = f_2(A)\vec{v} = \frac{1}{2}(A-I_3)\vec{v} \quad \vec{0}$$

$-\frac{1}{2}(A-3I_3)\vec{v} = -\frac{1}{2}(A-3I_3)\vec{v}_1 - \frac{1}{2}(A-3I_3)\vec{v}_2 = \vec{v}_1$

具体例 (4)—固有多項式が重根を持つ場合

Theorem

$A \in M_3(\mathbf{K})$, $\alpha, \beta \in \mathbf{K}$ に対して

$$\Phi_A(\lambda) = (\lambda - \alpha)^2(\lambda - \beta), \quad \alpha \neq \beta$$

が成立するとします．このとき

$\Phi_A(\alpha) = 0 \iff |\alpha I_3 - A| = 0$

$$1 \leq \dim V(\alpha) \leq 2$$

$\dim V(\alpha) = 1$ または 2

対角化できない． 対角化できる

$\dim V(\alpha) = 3$ とすると $\rightsquigarrow$ $\vec{p}_1, \vec{p}_2, \vec{p}_3$ 線形独立 $\in V(\alpha)$

$P = (\vec{p}_1\ \vec{p}_2\ \vec{p}_3)$ 正則.

$$AP = (A\vec{p}_1\ A\vec{p}_2\ A\vec{p}_3)$$

$$= (\alpha\vec{p}_1\ \alpha\vec{p}_2\ \alpha\vec{p}_3)$$

$$= (\vec{p}_1\ \vec{p}_2\ \vec{p}_3)\begin{pmatrix}\alpha & & \\ & \alpha & \\ & & \alpha\end{pmatrix}$$

$$P^{-1}AP = \alpha I_3. \rightsquigarrow A = P(\alpha I_3)P^{-1}$$

$$= \alpha I_3.$$

$\boxed{\Phi_A(\lambda) = (\lambda - \alpha)^3 とする}$ impossible

問題設定

以下では場合分けをして考えます．$A \in M_3(\mathbf{K})$, $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbf{K}$ として

$$\alpha \neq \beta,\ \beta \neq \gamma,\ \gamma \neq \alpha$$

とします．以下では 3 つの場合に分けて A の対角化の必要十分条件について考えていきます．

(I) $\Phi_A(\lambda) = (\lambda - \alpha)(\lambda - \beta)(\lambda - \gamma)$ A は対角化可能．

(II) $\Phi_A(\lambda) = (\lambda - \alpha)^2(\lambda - \beta)$

(III) $\Phi_A(\lambda) = (\lambda - \alpha)^3$

+ スペクトル分解．

(I) $\Phi_A(\lambda) = (\lambda-\alpha)(\lambda-\beta)(\lambda-\gamma)$ の場合

- （定理 1）A は対角化可能，すなわち正則な $P \in M_3(\mathbf{K})$ が存在して

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \alpha & & \\ & \beta & \\ & & \gamma \end{pmatrix}$$

- （スペクトル分解可能）$\mathbf{K}^3 = V(\alpha) \oplus V(\beta) \oplus V(\gamma)$

$$\mathbf{K}^3 \supset V(\alpha) \oplus V(\beta) \oplus V(\gamma)$$ OK

$\mathbf{K}^3 \subset V(\alpha) \oplus V(\beta) \oplus V(\gamma)$

$$\dim V(\alpha) \geq 1,\ \dim V(\beta) \geq 1,\ \dim V(\gamma) \geq 1$$

別の議論。

から

$$3 = \dim \mathbf{K}^3 \geq \dim V(\alpha) + \dim V(\beta) + \dim V(\gamma) \geq 1+1+1 = 3$$

となるので

$$\dim V(\alpha) = 1,\ \dim V(\beta) = 1,\ \dim V(\gamma) = 1$$

$$\mathbf{K}^3 = V(\alpha) \oplus V(\beta) \oplus V(\gamma)$$

$$\mathbb{K}^3 \subset V(\alpha) \oplus V(\beta) \oplus V(\gamma)$$

$\forall \vec{v}$

dim $V(\alpha) = 1$

$V(\beta)$

$V(\gamma)$

$$V(\alpha) = \mathbb{K}\vec{p}_1, \quad V(\beta) = \mathbb{K}\vec{p}_2, \quad V(\gamma) = \mathbb{K}\vec{p}_3$$

$$\vec{p}_1 \neq \vec{0}, \quad \vec{p}_2 \neq \vec{0}, \quad \vec{p}_3 \neq \vec{0}.$$

$P = (\vec{p}_1\ \vec{p}_2\ \vec{p}_3)$

正則

$$\vec{c} = P^{-1}\vec{v}$$

$$\vec{v} = PP^{-1}\vec{v} = P\vec{c} = \underset{\substack{\rotatebox{90}{$\in$} \\ V(\alpha)}}{c_1\vec{p}_1} + \underset{\substack{\rotatebox{90}{$\in$} \\ V(\beta)}}{c_2\vec{p}_2} + \underset{\substack{\rotatebox{90}{$\in$} \\ V(\gamma)}}{c_3\vec{p}_3} \in V(\alpha) \oplus V(\beta) \oplus V(\gamma)$$

(I) $\Phi_A(\lambda) = (\lambda-\alpha)(\lambda-\beta)(\lambda-\gamma)$ の場合

$\Phi_A(\lambda) = (\lambda-\alpha)(\lambda-\beta)(\lambda-\gamma)$

$\Phi_A(A) = (A-\alpha I_3)(A-\beta I_3)(A-\gamma I_3)$
$\shortparallel$
O_3

- $(A-\alpha I_3)(A-\beta I_3)(A-\gamma I_3) = O_3$

$\vec{v} \in \mathbf{R}^3$ を

$$\vec{v} = \vec{v}_1 + \vec{v}_2 + \vec{v}_3, \quad \vec{v}_1 \in V(\alpha),\ \vec{v}_2 \in V(\beta),\ \vec{v}_3 \in V(\gamma)$$

とスペクトル分解します．このとき

$$\begin{aligned}
\underbrace{(A-\alpha I_3)(A-\beta I_3)(A-\gamma I_3)}_{=O_3}\vec{v} &= (A-\beta I_3)(A-\gamma I_3)(A-\alpha I_3)\vec{v}_1 \\
&+ (A-\alpha I_3)(A-\gamma I_3)(A-\beta I_3)\vec{v}_2 \\
&+ (A-\alpha I_3)(A-\beta I_3)(A-\gamma I_3)\vec{v}_3 \\
&= \vec{0}+\vec{0}+\vec{0} = \vec{0}
\end{aligned}$$

$A \in M_3(\mathbb{K})$

ケーリー・ハミルトンの定理

$\Phi_A(A) = O_3$

$= (A-*I_3)(A-*I_3)$

$(A-*I_3)(A-*I_3)$

$A \in M_{m,n}(\mathbb{K})$

$$A\vec{v} = \vec{0} \quad (\vec{v} \in \mathbb{K}^n)$$

$$\Longleftrightarrow \quad A = O_{m,n}.$$

→ どうに

$$A\vec{e}_j = \vec{a}_j = \vec{0}$$

Aの第j列.

(III) $\Phi_A(\lambda) = (\lambda - \alpha)^3$ の場合

A が対角化可能ならば次のページの定理 3 から

$\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha.$

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \alpha & & \\ & \alpha & \\ & & \alpha \end{pmatrix}$$

$= \alpha I_3$

を満たす正則行列 P が存在する．このとき

- $A = \alpha I_3$
- $\mathbf{K}^3 = V(\alpha)$

$\longrightarrow$ $A = P(\alpha I_3)P^{-1}$

$= \alpha I_3$

定理 3

$A \in M_3(\mathbf{K})$ が正則な P と $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ に対して

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \alpha_1 & & \\ & \alpha_2 & \\ & & \alpha_3 \end{pmatrix}$$

が成立するならば

$$\Phi_A(\lambda) = (\lambda - \alpha_1)(\lambda - \alpha_2)(\lambda - \alpha_3)$$

大事 →

$$\parallel$$

$$\Phi_{P^{-1}AP}(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda-\alpha_1 & & \\ & \lambda-\alpha_2 & \\ & & \lambda-\alpha_3 \end{vmatrix}$$

II$\Phi_A(\lambda) = (\lambda-\alpha)^2(\lambda-\beta)$ の場合

$\alpha \neq \beta.$

$=1, 2.$

・$1 \leq \dim V(\alpha) \leq 2$

背理法で示す．$\dim V(\alpha) = 3$ とすると $V(\alpha) = \mathbf{K}^3$ となるが，任意の $\vec{v} \in \mathbf{K}^3$ に対して $A\vec{v} = \alpha\vec{v}$ から $A = \alpha I_3$ となる．$\Phi_A(\lambda) = (\lambda-\alpha)^3$ となるので矛盾が生じる．

・$\dim V(\beta) = 1$

$\dim V(\beta) \geq 1$ は明らかである．$\dim V(\beta) \geq 2$ とすると $\vec{p} \nparallel \vec{q}$ を満たす $\vec{p}, \vec{q} \in V(\beta)$ が存在する．このとき $A\vec{p} = \beta\vec{P}$, $A\vec{q} = \beta\vec{q}$ となります．さらに $\vec{r} \in \mathbf{K}^3$ を選んで $P := (\vec{p}\ \vec{q}\ \vec{r})$ が正則であるようにすると

$$A(\vec{p}\ \vec{q}\ \vec{r}) = (\vec{p}\ \vec{q}\ \vec{r})\begin{pmatrix} \beta & 0 & *_1 \\ & \beta & *_2 \\ & & *_3 \end{pmatrix} \quad \text{従って} \quad P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \beta & 0 & *_1 \\ & \beta & *_2 \\ & & *_3 \end{pmatrix}$$

となります．このとき $\Phi_A(\lambda) = (\lambda-\beta)^2(\lambda-*_3)$ から矛盾が生じます．

定理として
示した．

一般には

$A \in M_n(\mathbf{K})$ の固有多項式がある $g(\lambda) \in \mathbf{K}[\lambda]$, $\alpha \in \mathbf{K}$ を用いて

$$\Phi_A(\lambda) = (\lambda - \alpha)^m g(\lambda), \quad g(\alpha) \neq 0, \quad m \geq 1$$

と表されているとします．このとき

$$1 \leq \underbrace{\dim V(\alpha)}_{} \leq m$$

が成立します．

$\Phi_A(\alpha) = 0$

部分空間の基底の選定が必要.

II $\Phi_A(\lambda) = (\lambda - \alpha)^2(\lambda - \beta)$ の場合

$\dim V(\alpha) = 2 \iff \mathbb{K}^3 = V(\alpha) \oplus V(\beta) \implies$ A は対角化可能.

$\dim V(\alpha) = 2$, ~~$\dim V(\beta) = 1$~~ ならば A は対角化可能である.

$\vec{p}_1, \vec{p}_2, \vec{p}_3$ は線形独立.

$$\mathbb{K}^3 = \underbrace{V(\alpha)}_{\vec{p}_1,\ \vec{p}_2} \oplus \underbrace{V(\beta)}_{\vec{p}_3}$$

となります. $V(\alpha)$ の基底 $\vec{p}_1, \vec{p}_2, V(\beta)$ の基底 $\vec{p}_3$ をとると $P = (\vec{p}_1\ \vec{p}_2\ \vec{p}_3)$ は正則で

$\vec{p}_1 \nparallel \vec{p}_2$

$$AP = P \begin{pmatrix} \alpha & & \\ & \alpha & \\ & & \beta \end{pmatrix}$$

$\in V(\beta)$

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \alpha & & \\ & \alpha & \\ & & \beta \end{pmatrix}$$

と A は対角化されます.

$V(\alpha) \ni \boxed{c_1\vec{p}_1 + c_2\vec{p}_2} + \boxed{c_3\vec{p}_3} = \vec{0}$

$\rightarrow c_1\vec{p}_1 + c_2\vec{p}_2 = \vec{0},\ c_3\vec{p}_3 = \vec{0} \rightarrow c_1 = c_2 = 0,\ c_3 = 0.$

$\ne \vec{0}$

$\mathbb{R}^3 \overset{\supset}{\subseteq} V(\alpha) \oplus V(\beta)$

$\Downarrow$ $\quad \vec{p}_1, \vec{p}_2 \quad \vec{p}_3 \longrightarrow P = (\vec{p}_1, \vec{p}_2, \vec{p}_3)$ 正則

$\forall \vec{v}$ $\quad \vec{p}_1 \nparallel \vec{p}_2$

$\vec{c} = P^{-1}\vec{v}$

$$\vec{v} = PP^{-1}\vec{v} = P\vec{c} = \underbrace{c_1\vec{p}_1 + c_2\vec{p}_2}_{\in V(\alpha)} + \underbrace{c_3\vec{p}_3}_{\in V(\beta)} \in V(\alpha) \oplus V(\beta)$$

$\Phi_A(\lambda) = (\lambda-\alpha)^2(\lambda-\beta)$ の場合

A が対角化可能ならば $\mathbf{K}^3 = V(\alpha) \oplus V(\beta)$ このとき

$$\dim V(\alpha) = 2,\ \dim V(\beta) = 1$$

$*_1, *_2, *_3$

α 2つ, β 1つ.

正則な $P = (\vec{p}_1\ \vec{p}_2\ \vec{p}_3) \in M_3(\mathbf{K})$ に対して

$$AP = P\begin{pmatrix} *_1 & & \\ & *_2 & \\ & & *_3 \end{pmatrix}$$

$(A\vec{p}_1\ A\vec{p}_2\ A\vec{p}_3)$

$= (*_1\vec{p}_1\ *_2\vec{p}_2\ *_3\vec{p}_3)$

が成立すると $\vec{p}_1, \vec{p}_2, \vec{p}_3 \in V(\alpha) \oplus V(\beta)$ となります．$\vec{p}_1, \vec{p}_2, \vec{p}_3$ が線型独立なので

$$\dim\left(V(\alpha) \oplus V(beta)\right) = 3$$

β

となりますから

$$\mathbf{K}^3 = V(\alpha) \oplus V(\beta)$$

このとき $\dim V(\beta) = 1$ なので

$$\dim V(\alpha) = 3 - \dim V(\beta) = 2$$

$\Downarrow$

P 正則より

$V(\alpha)$ 2次元

$V(\beta)$ 1次元.

II $\Phi_A(\lambda) = (\lambda-\alpha)^2(\lambda-\beta)$ の場合

A が対角化可能ならば $(A-\alpha I_3)(A-\beta I_3) = O_3$

$\Rightarrow$

$\Leftarrow$

このとき

$$\mathbf{K}^3 = V(\alpha) \oplus V(\beta)$$

となります．任意の $\vec{v} \in \mathbf{K}^3$ に対して

$$\vec{v} = \vec{v}_1 + \vec{v}_2, \quad \vec{v}_1 \in V(\alpha), \quad \vec{v}_2 \in V(\beta)$$

と（スペクトル）分解すると

$$(A-\beta I_3)(A-\alpha I_3)\vec{v}_1 = \vec{0}$$

$$(A-\alpha I_3)(A-\beta I_3)\vec{v}_2 = \vec{0}$$

$= \vec{0}$

$= \vec{0}$

から

$$(A-\alpha I_3)(A-\beta I_3)\vec{v} = \vec{0}$$

$(A-\alpha I_3)(A-\beta I_3)\vec{v}$

$= (\quad)(\quad)\vec{v}_1$

$+ (\quad)(\quad)\vec{v}_2$

$= \vec{0} + \vec{0} = \vec{0}.$

II $\Phi_A(\lambda) = (\lambda - \alpha)^2(\lambda - \beta)$ の場合

スペクトル分解可能

$(A - \alpha I_3)(A - \beta I_3) = O_3$ ならば A は対角化可能

$$\frac{\lambda - \alpha}{\beta - \alpha} + \frac{\lambda - \beta}{\alpha - \beta} = 1$$

$$= \frac{-(\lambda-\alpha) + (\lambda-\beta)}{\alpha - \beta} = \frac{\alpha-\beta}{\alpha-\beta} = 1$$

が（恒等的に）成立します．これから

$$\frac{1}{\beta - \alpha}(A - \alpha I_3) + \frac{1}{\alpha - \beta}(A - \beta I_3) = I_3$$

が成立します．（次頁に続く）

II $\Phi_A(\lambda) = (\lambda-\alpha)^2(\lambda-\beta)$ の場合

これから任意の $\vec{v} \in \mathbf{K}^3$ に対して

$$\vec{v}_2 = \frac{1}{\beta-\alpha}(A-\alpha I_3)\vec{v}, \quad \vec{v}_1 = \frac{1}{\alpha-\beta}(A-\beta I_3)\vec{v}$$

と定めると $\vec{v} = \vec{v}_1 + \vec{v}_2$ となります．さらに

$\vec{v}_1 \in V(\alpha) \rightarrow$

$$(A-\alpha I_3)\vec{v}_1 = \frac{1}{\alpha-\beta}(A-\beta I_3)(A-\alpha I_3)\vec{v} = \frac{1}{\alpha-\beta}O_3\vec{v} = \vec{0}$$

$\vec{v}_2 \in V(\beta) \rightarrow$

$$(A-\beta I_3)\vec{v}_2 = \frac{1}{\beta-\alpha}(A-\alpha I_3)(A-\beta I_3)\vec{v} = \frac{1}{\beta-\alpha}O_3\vec{v} = \vec{0}$$

$= O_3$

から

$$\vec{v}_1 \in V(\alpha), \ \vec{v}_2 \in V(\beta)$$

が従います．これから $\mathbf{K}^3 = V(\alpha) \oplus V(\beta)$

まとめ

$\alpha \neq \beta,\ \beta \neq \gamma,\ \gamma \neq \alpha.$

(I) $\Phi_A(\lambda) = (\lambda - \alpha)(\lambda - \beta)(\lambda - \gamma)$ の場合

- A は対角化可能
- $\mathbf{K}^3 = V(\alpha) \oplus V(\beta) \oplus V(\gamma)$
- $(A - \alpha I_3)(A - \beta I_3)(A - \gamma I_3) = O_3$ $\leftarrow$ C-H.

(II) $\Phi_A(\lambda) = (\lambda - \alpha)^2(\lambda - \beta)$ の場合

$$
\begin{aligned}
A\text{は対角化可能} &\Leftrightarrow \mathbf{K}^3 = V(\alpha) \oplus V(\beta) \quad \Leftrightarrow \dim V(\alpha) = 2. \\
&\Leftrightarrow (A - \alpha I_3)(A - \beta I_3) = O_3
\end{aligned}
$$

(II) $\Phi_A(\lambda) = (\lambda - \alpha)^3$ の場合

$$
\begin{aligned}
A\text{は対角化可能} &\Leftrightarrow \mathbf{K}^3 = V(\alpha) \quad \Leftrightarrow \dim V(\alpha) = 3. \\
&\Leftrightarrow A = \alpha I_3
\end{aligned}
$$