I 次の曲面の P_0 における接平面を求めましょう．</dd>

(1)

$$g(x,y,z) = x^2 + 4y^2 + 9z^2 - 17 = 0 \quad \text{at } \mathrm{P}_0(2,-1,1)$$

(2)

$$g(x,y,z) = x^2 - 4y^2 + 9z^2 - 1 = 0 \quad \text{at } \mathrm{P}_0(1,1,-\frac{2}{3})$$

(3)

$$g(x,y,z) = x^{\frac{1}{2}} y^{\frac{1}{3}} z^{\frac{1}{4}} - 1 = 0 \quad \text{at } \mathrm{P}_0(1,1,1)$$

解答 (1)

$$g_x = 2x,\ g_y = 8y,\ g_x = 18z$$

なので

$$g_x(\mathrm{P}_0) = 4,\ g_y(\mathrm{P}_0) = -8,\ g_x(\mathrm{P}_0) = 18$$

となります．従って接線の方程式は

$$4(x-2) - 8(y+1) + 18(z-1) = 0$$

(2)

$$g_x = 2x,\ g_y = -8y,\ g_x = 18z$$

なので

$$g_x(\mathrm{P}_0) = 2,\ g_y(\mathrm{P}_0) = -8,\ g_x(\mathrm{P}_0) = -12$$

となります．従って接線の方程式は

$$2(x-1) - 8(y-1) - 12(z - \frac{2}{3}) = 0$$

(3)

$$g_x = \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}} y^{\frac{1}{3}} z^{\frac{1}{4}},\ g_y = \frac{1}{3} x^{\frac{1}{2}} y^{-\frac{2}{3}} z^{\frac{1}{4}},\ g_z = \frac{1}{4} x^{\frac{1}{2}} y^{\frac{1}{3}} z^{-\frac{3}{4}}$$

なので

$$g_x(\mathrm{P}_0) = \frac{1}{2},\ g_y(\mathrm{P}_0) = \frac{1}{3},\ g_x(\mathrm{P}_0) = \frac{1}{4}$$

となります．従って接線の方程式は

$$\frac{1}{2}(x-1) + \frac{1}{3}(y-1) + \frac{1}{4}(z-1) = 0$$

II 以下のベクトルが線型独立か線型従属か行列の行基本変形を用いて判定しましょう．

(i) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\vec{c} = \begin{pmatrix} 7 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}$

(ii) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\vec{c} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}$

(iii) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 7 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -6 \end{pmatrix}$, $\vec{c} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\vec{d} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -5 \end{pmatrix}$

(iv) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 7 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{c} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -4 \end{pmatrix}$

解答 (i) $x\vec{a} + y\vec{b} + z\vec{c} = \vec{0}$ を解くために $(\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c})$ を行基本変形します．

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 7 \\ -2 & 1 & -4 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{(1)} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 7 \\ 0 & 5 & 10 \\ 0 & -3 & -6 \end{pmatrix} \xrightarrow{(2)} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 7 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & -3 & -6 \end{pmatrix} \xrightarrow{(3)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

から $x\vec{a} + y\vec{b} + z\vec{c} = \vec{0}$ は

$$\left\{ \begin{array}{ccccccc} x & & & + & 3z & = & 0 \\ & & y & + & 2z & = & 0 \end{array} \right.$$

と必要十分であることが分かります．特に $z = -1$ として $x = 3,\ y = 2$ が解となりますから

$$3\vec{a} + 2\vec{b} - \vec{c} = \vec{0}$$

が成立することが分かります．よって $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ は線型従属であることが分かります．

なお，上で以下の行基本変形を用いました．

$$\begin{array}{ll} (1) & 2r+ = 1r \times 2,\ 3r+ = 1r \times (-1) \\ (2) & 2r\times = \frac{1}{5} \\ (3) & 1r+ = 2r \times (-2),\ 3r+ = 2r \times 3 \end{array}$$

(ii) $x\vec{a} + y\vec{b} + z\vec{c} = \vec{0}$ を解くために $(\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c})$ を行基本変形します．

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & -3 & -1 \\ -3 & 2 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow{(1)} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & -5 & -5 \\ 0 & 5 & 11 \end{pmatrix} \xrightarrow{(2)} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 5 & 11 \end{pmatrix} \xrightarrow{(3)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$
$$\xrightarrow{(4)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{(5)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

から $x\vec{a} + y\vec{b} + z\vec{c} = \vec{0}$ は

$$\left\{ \begin{array}{ccccc} x & & & = & 0 \\ & y & & = & 0 \\ & & z & = & 0 \end{array} \right.$$

と必要十分であることが分かります．従って $x\vec{a}+y\vec{b}+z\vec{c}=\vec{0}$ から $x=y=z=0$ が従いますから，$\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ は線型独立であることが分かります．

なお，上で以下の行基本変形を用いました．

$$\begin{array}{ll}(1) & 2r+=1r\times(-2),\ 3r+=1r\times 3\\ (2) & 2r\times=\left(-\frac{1}{5}\right)\\ (3) & 1r+=2r\times(-1),\ 3r+=2r\times(-5)\\ (4) & 3r\times=\frac{1}{6}\\ (5) & 1r+=3r\times(-1),\ 2r+=3r\times(-1)\end{array}$$

(iii) $x\vec{a}+y\vec{b}+z\vec{c}+w\vec{d}=\vec{0}$ を解くために $(\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c}\ \vec{d})$ を行基本変形します．

$$\begin{pmatrix}1&2&3&2\\-3&0&-1&4\\7&6&-1&-5\end{pmatrix}\xrightarrow{(1)}\begin{pmatrix}1&2&3&2\\0&6&8&10\\0&-8&-22&-19\end{pmatrix}\xrightarrow{(2)}\begin{pmatrix}1&2&3&2\\0&1&\frac{4}{3}&\frac{5}{3}\\0&-8&-22&-19\end{pmatrix}$$
$$\xrightarrow{(3)}\begin{pmatrix}1&0&\frac{1}{3}&-\frac{4}{3}\\0&1&\frac{4}{3}&\frac{5}{3}\\0&0&-\frac{34}{3}&-\frac{17}{3}\end{pmatrix}\xrightarrow{(4)}\begin{pmatrix}1&0&\frac{1}{3}&-\frac{4}{3}\\0&1&\frac{4}{3}&\frac{5}{3}\\0&0&1&\frac{1}{2}\end{pmatrix}$$
$$\xrightarrow{(5)}\begin{pmatrix}1&0&0&-\frac{3}{2}\\0&1&0&\frac{5}{6}\\0&0&1&\frac{1}{2}\end{pmatrix}$$

から $x\vec{a}+y\vec{b}+z\vec{c}+w\vec{d}=\vec{0}$ は

$$\left\{\begin{array}{ccccccc}x&&&-&\frac{3}{2}w&=&0\\&y&&+&\frac{5}{6}w&=&0\\&&z&+&\frac{1}{2}w&=&0\end{array}\right.$$

と必要十分であることが分かります．従って $w=1$ として得られる解

$$x=\frac{3}{2},\ y=-\frac{5}{6},\ z=-\frac{1}{2},\ w=1$$

を用いると非自明な線型関係

$$\frac{3}{2}\vec{a}-\frac{5}{6}\vec{b}-\frac{1}{2}\vec{c}+\vec{d}=\vec{0}$$

が成立することが分かります．よって $\vec{a},\ \vec{b},\ \vec{c},\ \vec{d}$ は線型従属であることが分かりました．

なお，上で以下の行基本変形を用いました．

$$\begin{array}{ll}(1) & 2r+=1r\times 3,\ 3r+=1r\times(-7)\\ (2) & 2r\times=\left(\frac{1}{6}\right)\\ (3) & 1r+=2r\times(-2),\ 3r+=2r\times 8\\ (4) & 3r\times=\left(-\frac{3}{34}\right)\\ (5) & 1r+=3r\times\left(-\frac{1}{3}\right),\ 2r+=3r\times\left(-\frac{5}{6}\right)\end{array}$$

(iv) $x\vec{a}+y\vec{b}+z\vec{c}=\vec{0}$ を解くために $(\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c})$ を行基本変形します．

$$\begin{pmatrix}2&0&3\\-3&0&-1\\7&0&-4\end{pmatrix}\xrightarrow{(1)}\begin{pmatrix}1&0&\frac{3}{2}\\-3&0&-1\\7&0&-4\end{pmatrix}\xrightarrow{(2)}\begin{pmatrix}1&0&\frac{3}{2}\\0&0&\frac{7}{2}\\0&0&-\frac{29}{2}\end{pmatrix}\xrightarrow{(3)}\begin{pmatrix}1&0&\frac{3}{2}\\0&0&1\\0&0&-\frac{29}{2}\end{pmatrix}$$
$$\xrightarrow{(4)}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}$$

から $x\vec{a}+y\vec{b}+z\vec{c}=\vec{0}$ は

$$\begin{cases} x & & & = & 0 \\ & & z & = & 0 \end{cases}$$

と必要十分であることが分かります．従って

$$x=0,\ y=1,\ z=0$$

が解となりますから，非自明な線型関係

$$1\cdot\vec{b}=\vec{0}$$

が成立することが分かります．よって $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ は線型従属であることが示されました．

なお，上で以下の行基本変形を用いました．

$$\begin{array}{ll} (1) & 1r\times=\frac{1}{2} \\ (3) & 2r+=1r\times 3,\ 3r+=1r\times(-7) \\ (4) & 2r\times=\frac{2}{7} \\ (5) & 1r+=2r\times\left(-\frac{3}{2}\right),\ 3r+=2r\times\frac{29}{2} \end{array}$$