復習 定理A.

仮定 (0), $I, p, q > 0$

(1) $u_x(P), u_y(P) > 0 \quad (\forall P \in \mathbb{R}^2_{++})$

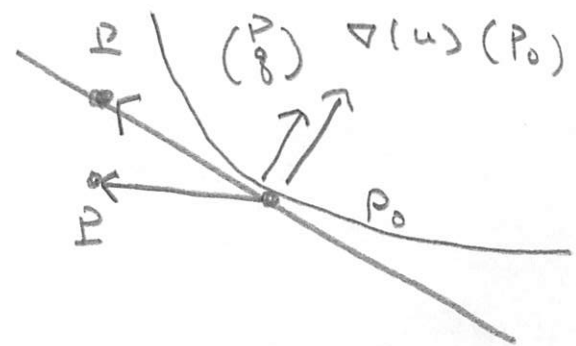
(2) $\begin{vmatrix} 0 & u_x(P) & u_y(P) \\ u_x(P) & & \\ u_y(P) & H(u)(P) & \end{vmatrix} > 0 \quad (P \in \mathbb{R}^2_{++})$

(3) (Lagrangeの条件)

$P_0 \in \mathbb{R}^2_{++}$ $(P_0 = (a, b))$ において $\exists \lambda \in \mathbb{R}$

$$\begin{cases} \nabla(u)(P_0) - \lambda \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} = \vec{0} \\ I - pa - qb = 0 \end{cases}$$

$\Longrightarrow$ (#) $\begin{cases} \overrightarrow{P_0P} \cdot \nabla(u)(P_0) \leq 0, \ P \neq P_0 \\ \Longrightarrow \ u(P) < u(P_0) \end{cases}$



$c(x, y) = px + qy$ として 定理Aの結論(#)の対偶を考えると

$$(\#)' \begin{cases} u(P) \geqq u(P_0) \\ \quad \Longrightarrow \quad px + qy > pa + pe = I. \\ \qquad \text{i.e.} \quad C(P) > C(P_0) = I. \end{cases}$$

となる。実際 (1)と(3)から $A > 0$ が分かるので

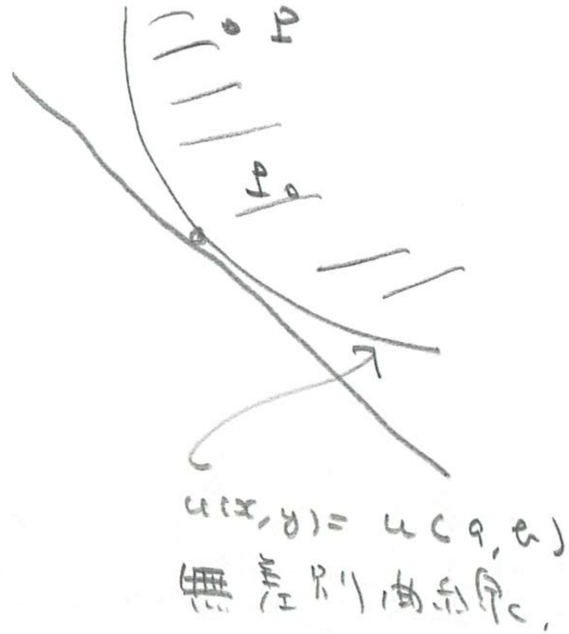
$$\overrightarrow{P_0P} \cdot \nabla(u)(P_0) \overset{>}{\leqq} 0$$

$$\Longleftrightarrow \quad \overrightarrow{P_0P} \cdot \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} \overset{>}{\leqq} 0$$

$$\Longleftrightarrow \quad p(x-a) + q(y-e) \overset{>}{\leqq} 0$$

$$\Longleftrightarrow \quad px + qy \underset{>}{\leqq} pa + qe.$$

$$\Longleftrightarrow \quad C(P) \underset{>}{\leqq} C(P_0)$$



仮定 (0)′ $p, q > 0$

(1), (2)

(3)′ $\exists \mu \in \mathbb{R}$ に対し

$$\begin{cases} p - \mu\, u_x(P_0) = 0 \\ q - \mu\, u_y(P_0) = 0 \\ \bar{u} - u(P_0) = 0 \end{cases}$$

と仮定する.

まず $\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} = \mu \nabla(u)(P_0)$ から $\mu > 0$ に注意.

$$I := pa + qe > 0 \,, \quad \lambda = \frac{1}{\mu}$$

とする

$$\begin{cases} u_x(P_0) - \lambda p = 0 \\ u_y(P_0) - \lambda q = 0 \\ I - pa - qe = 0 \end{cases}$$

が従う.

定理A 適用できて

(#)′ $u(P) \geq u(P_0),\ P \neq P_0 \implies c(P) > c(P_0)$

が示せた.

以上で次の定理を示した.

定理B 仮定 (0)′ $p, q > 0$

仮定 (1), (2)

仮定 (3)′ $P_0(a, b)$ において $\exists \mu \in \mathbb{R}$

$$\begin{cases} p + \mu(-u_x(P_0)) = 0 \\ q + \mu(-u_y(P_0)) = 0 \\ \bar{u} - u(P_0) = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad (\#)' \begin{cases} u(P) \geqq u(P_0) \\ P \neq P_0 \end{cases} \Longrightarrow c(P) > c(P_0)$$

定理Aを適用して定理Bを示したプロセスでは

$$a = x^*(p, q, \bar{u}) = x(p, q, E(p, q, \bar{u})) \quad (\alpha)$$

$$b = y^*(p, q, \bar{u}) = y(p, q, E(p, q, \bar{u})) \quad (\beta)$$

（ただし $I = E(p, q, \bar{u}) = pa + qb$ ）

$$v(p, q, E(p, q, \bar{u})) = \bar{u}$$

同様に定理Bから定理Aを示すこともできて

$$x(p, q, I) = x^*(p, q, v(p, q, I))$$

$$y(p, q, I) = y^*(p, q, v(p, q, I))$$

$$E(p, q, v(p, q, I)) = I$$

もOK.

(α)、(β) すなわち

$$x^*(p, q, \bar{u}) = x(p, q, E(p, q, \bar{u})) \qquad (\alpha)$$

$$y^*(p, q, \bar{u}) = y(p, q, E(p, q, \bar{u})) \qquad (\beta)$$

を p, q で偏微分すると

$$\frac{\partial x^*}{\partial p} = \frac{\partial x}{\partial p} + \frac{\partial x}{\partial I} \cdot \frac{\partial E}{\partial p} = \frac{\partial x}{\partial p} + \frac{\partial x}{\partial I} \cdot x^*$$

$$\frac{\partial x^*}{\partial q} = \frac{\partial x}{\partial q} + \frac{\partial x}{\partial I} \cdot \frac{\partial E}{\partial q} = \frac{\partial x}{\partial q} + \frac{\partial x}{\partial I} \cdot y^*$$

$$\frac{\partial y^*}{\partial p} = \frac{\partial y}{\partial p} + \frac{\partial y}{\partial I} \cdot \frac{\partial E}{\partial p} = \frac{\partial y}{\partial p} + \frac{\partial y}{\partial I} \cdot x^*$$

$$\frac{\partial y^*}{\partial q} = \frac{\partial y}{\partial q} + \frac{\partial y}{\partial I} \cdot \frac{\partial E}{\partial q} = \frac{\partial y}{\partial q} + \frac{\partial y}{\partial I} \cdot y^*$$

が従います。これがスルツキー方程式です。