第 6 講義 06 月 09 日　演習問題解答

I 以下の函数の停留点を求めて極大・極小を判定しましょう.

(1) $z = x^2 + xy + y^2 - 4x - 8y$

(2) $z = x^3 + y^3 - 9xy + 27$

(3) $z = x^2 + xy - y^2 - 4x - 2y$

(4) $z = x^2 + 4xy + 2y^2 - 6x - 8y$

(5) $z = x^3 - xy - y^2$

(6) $z = e^{-x^2-y^2}(2x^2 + y^2)$

(7) $z = (x^2 + y^2)^2 - 2(x^2 - y^2)$

(8) $z = x^3 + y^3 + 6xy$

解答 (1)

$$\begin{cases} z_x &= 2x + y - 4 &= 0 \\ z_y &= x + 2y - 8 &= 0 \end{cases}$$

をクラメールの公式を使って解くと

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 8 & 2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}} = \frac{0}{3} = 0, \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 8 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}} = \frac{12}{3} = 4$$

となりますから，$(x, y) = (0, 4)$ が z の停留点であることが分かります．さらに

$$z_{xx} = 2,\ z_{xy} = z_{yx} = 1,\ z_{yy} = 2$$

と計算されるので

$$z_{xx} = 2 > 0, \quad \det(H(z)) = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 2 \cdot 2 - 1^2 = 3 > 0$$

から $(x, y) = (0, 4)$ で z は極小であることが分かります.

注意 $z_{xx} > 0$, $\det(H(z)) > 0$ が $\mathbf{R}^2$ のすべての点で成立しますから

$$z(0, 4) < z(x, y) \quad ((x, y) \neq (0, 4))$$

が成立することが分かります.

注意 $A = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} -4 \\ -8 \end{pmatrix}$ とすれば

$$z = \left(A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) + \left(\vec{b}, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right)$$

と表現できます.

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \vec{\alpha}, \quad \text{ただし } \vec{\alpha} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$$

によって平行移動の座標変換を定めると

$$
\begin{aligned}
z &= \left(A\left(\begin{pmatrix}X\\Y\end{pmatrix}+\vec{\alpha}\right), \begin{pmatrix}X\\Y\end{pmatrix}+\vec{\alpha}\right) + \left(\vec{b}, \begin{pmatrix}X\\Y\end{pmatrix}+\vec{\alpha}\right) \\
&= \left(A\begin{pmatrix}X\\Y\end{pmatrix}+A\vec{\alpha}, \begin{pmatrix}X\\Y\end{pmatrix}+\vec{\alpha}\right) + \left(\vec{b}, \begin{pmatrix}X\\Y\end{pmatrix}\right) + \left(\vec{b}, \vec{\alpha}\right) \\
&= \left(A\begin{pmatrix}X\\Y\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}X\\Y\end{pmatrix}\right) + \left(A\begin{pmatrix}X\\Y\end{pmatrix}, \vec{\alpha}\right) + \left(A\vec{\alpha}, \begin{pmatrix}X\\Y\end{pmatrix}\right) + (A\vec{\alpha}, \vec{\alpha}) + \left(\vec{b}, \begin{pmatrix}X\\Y\end{pmatrix}\right) + \left(\vec{b}, \vec{\alpha}\right)
\end{aligned}
$$

と展開できます．ここで

$$
\left(A\begin{pmatrix}X\\Y\end{pmatrix}, \vec{\alpha}\right) = \left(\begin{pmatrix}X\\Y\end{pmatrix}, {}^{t}A\vec{\alpha}\right) = \left(\begin{pmatrix}X\\Y\end{pmatrix}, A\vec{\alpha}\right) = \left(A\vec{\alpha}, \begin{pmatrix}X\\Y\end{pmatrix}\right)
$$

と変形すると

$$
\begin{aligned}
z &= \left(A\begin{pmatrix}X\\Y\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}X\\Y\end{pmatrix}\right) + 2\left(A\vec{\alpha}, \begin{pmatrix}X\\Y\end{pmatrix}\right) + (A\vec{\alpha}, \vec{\alpha}) + \left(\vec{b}, \begin{pmatrix}X\\Y\end{pmatrix}\right) + \left(\vec{b}, \vec{\alpha}\right) \\
&= \left(A\begin{pmatrix}X\\Y\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}X\\Y\end{pmatrix}\right) + \left(2A\vec{\alpha}+\vec{b}, \begin{pmatrix}X\\Y\end{pmatrix}\right) + (A\vec{\alpha}, \vec{\alpha}) + (\vec{b}, \vec{\alpha})
\end{aligned}
$$

となります．ここで

$$
2A\vec{\alpha}+\vec{b} = \vec{0}
$$

すなわち

$$
\vec{\alpha} = \begin{pmatrix}x_0\\y_0\end{pmatrix} = -\frac{1}{2}A^{-1}\vec{b} = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix}\frac{4}{3}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -\frac{1}{2}\\ -\frac{1}{2} & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-4\\-8\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\4\end{pmatrix}
$$

と定めると

$$
\begin{aligned}
(A\vec{\alpha}, \vec{\alpha}) + (\vec{b}, \vec{\alpha}) &= (-\frac{1}{2}\vec{\alpha}, \vec{\alpha}) + (\vec{b}, \vec{\alpha}) \\
&= \frac{1}{2}(\vec{b}, \vec{\alpha}) \\
&= \frac{1}{2}\left(\begin{pmatrix}-4\\-8\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\4\end{pmatrix}\right) = -16
\end{aligned}
$$

から

$$
z = \left(A\begin{pmatrix}X\\Y\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}X\\Y\end{pmatrix}\right) - 16
$$

となります．ここで

$$
A\text{の}(1,1)\text{成分} = 1 > 0, \quad |A| = \frac{3}{4} > 0
$$

から A が定める 2 次形式は正定値であること，すなわち

$$
\left(A\begin{pmatrix}X\\Y\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}X\\Y\end{pmatrix}\right) > 0 \quad \left(\begin{pmatrix}X\\Y\end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}\right)
$$

であることが分かります．従って

$$
\begin{aligned}
z(X,Y) &= \left(A\begin{pmatrix}X\\Y\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}X\\Y\end{pmatrix}\right) - 16 \\
&> 0 - 16 = (A\vec{0}, \vec{0}) - 16 = Z(X=0, Y=0)
\end{aligned}
$$

が分かります．よって z の最小値は $X = Y = 0$ すなわち $(x, y) = (0, 4)$ のとき -16 であることが分かります．

(2)

$$\begin{cases} z_x &= 3x^2 - 9y &= 0 \cdots (I) \\ z_y &= 3y^2 - 9x &= 0 \cdots (II) \end{cases}$$

を解きます．(I) から $y = \frac{1}{3}x^2$ となるので (II) から得られる $y^2 = 3x$ に代入して

$$\frac{1}{9}x^4 = 3x \quad \text{すなわち} \quad x^4 = 27x$$

を得ます．従って

$$x = 0 \quad \text{または} \quad x = 3$$

が必要です．

(a) $\underline{x = 0 \text{ のとき}}$, (I) から $y = 0$ となりますが、逆に $(x, y) = (0, 0)$ は (I) かつ (II) を満たします．

(b) $\underline{x = 3 \text{ のとき}}$, (I) から $y = 3$ となりますが、逆に $(x, y) = (3, 3)$ は (I) かつ (II) を満たします．

　以上で z の停留点は $(x, y) = (0, 0), (3, 3)$ であることが分かりました．

　さらに

$$z_{xx} = 6x,\ z_{xy} = z_{yx} = -9,\ z_{yy} = 6y$$

であることに注意すると

(a) $\underline{(x, y) = (0, 0) \text{ のとき}}$,

$$\det H(z)(0, 0) = \begin{vmatrix} 0 & -9 \\ -9 & 0 \end{vmatrix} = -81 < 0$$

なりますから，z は $(x, y) = (0, 0)$ で極大でも極小でもないことが分かります．

(b) $\underline{(x, y) = (3, 3) \text{ のとき}}$,

$$z_{xx}(3, 3) = 18 > 0, \quad \det H(z)(3, 3) = \begin{vmatrix} 18 & -9 \\ -9 & 18 \end{vmatrix} = 9^2 \cdot 3 > 0 < 0$$

なりますから，z は $(x, y) = (0, 0)$ で極小であることが分かります．

(3)

$$\begin{cases} z_x &= 2x + y - 4 &= 0 \\ z_y &= x - 2y - 2 &= 0 \end{cases}$$

をクラメールの公式で解くと

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix}} = \frac{-10}{-5} = 2, \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix}} = \frac{0}{-5} = 0$$

となりますから，$(x, y) = (2, 0)$ が z の停留点であることが分かります．

　さらに

$$z_{xx} = 2,\ z_{xy} = z_{yx} = 1,\ z_{yy} = -2$$

と計算されるので

$$\det(H(z)) = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 2 \cdot (-2) - 1^2 = -5 < 0 > 0$$

から $(x, y) = (2, 0)$ で z は極大でも極小でもないことが分かります.

(4)

$$\begin{cases} z_x &= 2x + 4y - 6 &= 0 \\ z_y &= 4x + 4y - 8 &= 0 \end{cases}$$

をクラメールの公式で解くと

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 6 & 4 \\ 8 & 4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 4 \end{vmatrix}} = \frac{-8}{-8} = 1, \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 6 \\ 4 & 8 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 4 \end{vmatrix}} = \frac{-8}{-8} = 1$$

から停留点は $(x, y) = (1, 1)$ となります.

さらに

$$z_{xx} = 2,\ z_{xy} = z_{yx} = 4,\ z_{yy} = 4$$

であるので

$$\det(H(z)) = \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 4 \end{vmatrix} = -8 < 0$$

となるので $(x, y) = (1, 1)$ では極大でも極小でもないことが分かる。

(5)

$$\begin{cases} z_x &= 3x^2 - y &= 0 & (i) \\ z_y &= -x - 2y &= 0 & (ii) \end{cases}$$

を解きます。(ii) から $x = -2y$ となりますが，これを (i) に代入して

$$12y^2 - y = 0$$

を得ますが，これから $y = 0$ または $y = \frac{1}{12}$ であることが分かります．これを $x = -2y$ に代入して

$$\begin{array}{lll} y = 0 & \text{のとき} & x = 0 \\ y = \frac{1}{12} & \text{のとき} & x = -\frac{1}{6} \end{array}$$

となりますから，停留点は

$$(x, y) = (0, 0), \quad (-\frac{1}{6}, \frac{1}{12})$$

であることが分かります.

さらに

$$z_{xx} = 6x,\ z_{xy} = z_{yx} = -1,\ z_{yy} = -2$$

であることを用いて，この 2 点の極大・極小を判定しましょう.

(a) $(x, y) = (0, 0)$ のとき

$$\det(H(z)(0, 0)) = \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} = -1 < 0$$

となりますから，$(0, 0)$ では極大でも極小でもないことが分かります.

(b) $(x,y)=(-\frac{1}{6},\frac{1}{12})$ のとき

$$\det(H(z)(-\frac{1}{6},\frac{1}{12}))=\begin{vmatrix}-1 & -1\\ -1 & -2\end{vmatrix}=1>0,\quad z_{xx}(-\frac{1}{6},\frac{1}{12})=-1<0$$

から，$(-\frac{1}{6},\frac{1}{12})$ では極大であることが分かります.

(6) まず関数

$$z=e^{-x^2-y^2}(2x^2+y^2)$$

の停留点を求めましょう．まず z の偏導関数を計算すると

$$\begin{aligned}
z_x &= e^{-x^2-y^2}(-2x)(2x^2+y^2)+e^{-x^2-y^2}(4x)\\
&= 2xe^{-x^2-y^2}(-2x^2-y^2+2)\\
z_y &= e^{-x^2-y^2}(-2y)(2x^2+y^2)+e^{-x^2-y^2}(2y)\\
&= 2ye^{-x^2-y^2}(-2x^2-y^2+1)
\end{aligned}$$

となります．$e^{-x^2-y^2}>0$ ですから

$$\begin{aligned}
z_x=z_y=0 &\Leftrightarrow x(2x^2+y^2-2)=0 \text{ and } y(2x^2+y^2-1)=0\\
&\Leftrightarrow (x=0 \text{ or } 2x^2+y^2=2) \text{ and } (y=0 \text{ or } 2x^2+y^2=1)\\
&\Leftrightarrow (x=y=0) \text{ or } (x=0 \text{ and } 2x^2+y^2=1)\\
&\qquad \text{or } (y=0 \text{ and } 2x^2+y^2=2)\\
&\qquad \text{or } (2x^2+y^2=2 \text{ and } 2x^2+y^2=1)\\
&\Leftrightarrow (x=y=0) \text{ or } (x=0 \text{ and } y^2=1)\\
&\qquad \text{or } (y=0 \text{ and } x^2=1)\\
&\qquad \text{or } (2x^2+y^2=2 \text{ and } 2x^2+y^2=1)\\
&\Leftrightarrow (x,y)=(0,0),(0,\pm1),(\pm1,0)
\end{aligned}$$

が成立します．従って z の停留点は $(x,y)=(0,0),(0,\pm1),(\pm1,0)$ です.

さらに 2 階の偏導関数を求めましょう.

$$\begin{aligned}
z_{xx} &= 2e^{-x^2-y^2}(-2x^2-y^2+2)+2x(-2x)e^{-x^2-y^2}(-2x^2-y^2+2)+2xe^{-x^2-y^2}(-4x)\\
&= 2e^{-x^2-y^2}(-2x^2-y^2+2)-4x^2e^{-x^2-y^2}(-2x^2-y^2+4)\\
z_{xy} &= z_{yx}\\
&= 2x(-2y)e^{-x^2-y^2}(-2x^2-y^2+2)+2xe^{-x^2-y^2}(-2y)=-4xye^{-x^2-y^2}(-2x^2-y^2+3)\\
z_{yy} &= 2e^{-x^2-y^2}(-2x^2-y^2+1)+2y(-2y)e^{-x^2-y^2}(-2x^2-y^2+1)+2ye^{-x^2-y^2}(-2y)\\
&= 2e^{-x^2-y^2}(-2x^2-y^2+1)-4y^2e^{-x^2-y^2}(-2x^2-y^2+2)
\end{aligned}$$

と計算されます。停留点の値しか必要ないので、完全に式変形をする必要がないことに注意しましょう。

(a) $(x,y)=(0,0)$ のとき

$$z_{xx}(0,0)=4,\ z_{xy}(0,0)=z_{yx}(0,0)=0,\ z_{yy}(0,0)=2$$

が分かります。

$$z_{xx}(0,0)=4>0,\quad H(z)(0,0)=\begin{vmatrix}4 & 0\\ 0 & 2\end{vmatrix}=8>0$$

であるので z は $(0,0)$ で極小であることが分かります。
(b) $(x,y)=(0,\pm 1)$ のとき

$$z_{xx}(0,\pm 1)=2e^{-1},\ z_{xy}(0,\pm 1)=z_{yx}(0,0)=0,\ z_{yy}(0,\pm 1)=-4e^{-1}$$

が分かります。

$$H(z)(0,\pm 1)=\begin{vmatrix} 2e^{-1} & 0 \\ 0 & -4e^{-1} \end{vmatrix}=-8e^{-2}<0$$

であるので z は $(0,\pm 1)$ で極大でも極小でもありません.
(c) $(x,y)=(\pm 1,0)$ のとき

$$z_{xx}(\pm 1,0)=-8e^{-1},\ z_{xy}(0,0)=z_{yx}(0,0)=0,\ z_{yy}=-4e^{-1}$$

が分かります。

$$z_{xx}(\pm 1,0)=-8e^{-1}<00, \quad H(z)(0,0)=\begin{vmatrix} -8e^{-1} & 0 \\ 0 & -4e^{-1} \end{vmatrix}=32e^{-2}>0$$

であるので z は $(\pm 1,0)$ で極大であることが分かります。

(7) $f(x,y)$ の偏導関数は

$$\begin{aligned} f_x &= 2(x^2+y^2)\cdot 2x-4x=4x(x^2+y^2-1) \\ f_y &= 2(x^2+y^2)\cdot 2y-4x=4y(x^2+y^2+1) \end{aligned}$$

と計算されます。このことから

$$\begin{aligned} f_x=0 &\Leftrightarrow (x=0)\ \text{OR}\ (x^2+y^2=1) \\ f_y=0 &\Leftrightarrow y=0 \end{aligned}$$

が従いますので

$$\begin{aligned} f_x=f_y=0 &\Leftrightarrow (x=y=0)\ \text{OR}\ (x^2+y^2=1,\ \text{AND}\ y=0) \\ &\Leftrightarrow (x,y)=(0,0),\ (\pm 1,0) \end{aligned}$$

が分かります。以上で f の停留点は $(0,0),\ (1,0),\ (-1,0)$ の 3 点であることが示されました。
さらに 2 階の偏導関数を計算すると

$$\begin{aligned} f_{xx} &= 4(x^2+y^2-1)+4x\cdot 2x=4(3x^2+y^2-1) \\ f_{xy} &= 8xy \\ f_{xy} &= 4(x^2+y^2+1)+4y\cdot 2y=4(x^2+3y^2+1) \end{aligned}$$

となります。
(i) $(x,y)=(0,0)$ において Hesse 行列式は

$$\begin{vmatrix} -4 & 0 \\ 0 & 4 \end{vmatrix}=-16<0$$

となりますから、$(0,0)$ において f は極大でも極小でもありません。

(ii) $(x,y)=(\pm 1,0)$ において Hesse 行列式は

$$\begin{vmatrix} 8 & 0 \\ 0 & 8 \end{vmatrix} = 64 > 0$$

で、さらに $f_{xx}(\pm 1,0)=8>0$ も成立しますから、$(\pm 1,0)$ において f は極小であることが分かります。

(8)（コアテキストの 282 ページの例 8.18）

z の偏導関数は

$$\begin{cases} z_x = 3x^2+6y=0\cdots(1) \\ z_y = 3y^2+6x=0\cdots(2) \end{cases}$$

と計算されます. (2) から $x=-\frac{1}{2}y^2$ を得ますが, これを (1) から得られる $y=-\frac{1}{2}x^2$ に代入すると

$$y=-\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}y^2\right)^2=-\frac{1}{8}y^4$$

が導かれます. 従って

$$y(y^3+8)=0$$

から $y=0$ または $y=-2$ であることが必要条件であることが分かります. このとき

(i) $y=0$ のとき (2) に代入して $x=0$
(ii) $y=-2$ のとき (2) から $x=-2$ を得る.

を得ます. 以上で停留点は

$$(x,y)=(0,0)\text{または}(-2,-2)$$

であることが示されました.

$$z_{xx}=6x, z_{xy}=z_{yx}=6, z_{yy}=6y$$

から

$$D=\det(H(f))=z_{xx}z_{yy}-{z_{xy}}^2=(6x)(6y)-6^2=6^2(xy-1)$$

となります. 各停留点について, D の符号を調べると以下のようになります.

(i) $(0,0)$ のとき $D=6^2(-1)<0$ から $(0,0)$ では極大値, 極小値を取りません.
(ii) $(-2,-2)$ のとき $D=6^2((-2)(-2)-1)=6^2\cdot 3>0$

$$z_{xx}(-2,-2)=6(-2)=-12<0$$

ですから $(-2,-2)$ で極大値をとることが分ります.

II $\alpha, \beta > 0, A > 0$ を定数として Cobb-Douglas 型関数

$$Y = F(K, L) = AK^{\alpha}L^{\beta} \tag{5}$$

と定義します.

(1) F_{KK}, F_{KL}, F_{LK}, F_{LL} を求めましょう.

(2) 第 1 象限のすべての点 $(K, L) \in \mathbf{R}^2_{++}$ に対して

$$F_{KK}(K, L) < 0, \text{ かつ } \det(H(F)(K, L) > 0 \tag{6}$$

を満たす α, β の条件を求めましょう.

解答 (1)

$$F_K(K, L) = \alpha \cdot AK^{\alpha-1}L^{\beta}, \quad F_L(K, L) = \beta \cdot AK^{\alpha}L^{\beta-1}$$

から

$$\begin{aligned}
F_{KK}(K, L) &= \alpha(\alpha-1) \cdot AK^{\alpha-2}L^{\beta} \\
F_{KL}(K, L) &= \alpha\beta \cdot AK^{\alpha-1}L^{\beta-1} \\
F_{LK}(K, L) &= \alpha\beta \cdot AK^{\alpha-1}L^{\beta-1} \\
F_{LL}(K, L) &= \beta(\beta-1) \cdot AK^{\alpha}L^{\beta-2}
\end{aligned}$$

となります. 一般論で成立することが分かっていますが, $F_{KL} = F_{LK}$ に注意しましょう.

(2) $\alpha \cdot AK^{\alpha-2}L^{\beta} > 0$ から

$$F_{KK}(K, L) < 0 \Leftrightarrow \alpha < 1$$

が分かります. 次に

$$\begin{aligned}
\det(H(F)(K, L)) &= F_{KK}(K, L) \cdot F_{LL}(K, L) - F_{KL}(K, L)^2 \\
&= \alpha(\alpha-1) \cdot AK^{\alpha-2}L^{\beta} \cdot \beta(\beta-1) \cdot AK^{\alpha}L^{\beta-2} - \left(\alpha\beta \cdot AK^{\alpha-1}L^{\beta-1}\right)^2 \\
&= A^2K^{2\alpha-2}L^{2\beta-2}\left\{\alpha\beta(\alpha-1)(\beta-1) - \alpha^2\beta^2\right\} \\
&= A^2K^{2\alpha-2}L^{2\beta-2}\alpha\beta(1-\alpha-\beta)
\end{aligned}$$

となります. $= A^2K^{2\alpha-2}L^{2\beta-2} > 0$, $\alpha\beta > 0$ から

$$\det(H(F)(K, L)) \Leftrightarrow \alpha + \beta < 1$$

が分かります. 以上で求める条件は

$$\alpha < 1, \quad \alpha + \beta < 1$$

であることが分かります. この条件は

$$\alpha < 1, \quad \beta < 1, \quad \alpha + \beta < 1$$

と必要十分であることにも注意しましょう.

III 生産関数

$$f(x,y) = x^\alpha y^\beta \quad (\alpha, \beta > 0)$$

を考えます.

(1) $\det(H(f))$, f_{xx} を計算しましょう.

(2) $\alpha + \beta \neq 1$ のとき, 利潤関数

$$\pi(x,y) := pf(x,y) - qx - ry$$

の停留点を求めましょう. ここでは $p, q, r > 0$ とします.

(3) $\alpha + \beta < 1$ のとき利潤を最大化する (x,y) がただ一つ存在することを示しましょう.

解答 (1)

$$f_x = \alpha x^{\alpha-1} y^\beta$$
$$f_y = \beta x^\alpha y^{\beta-1}$$

から

$$f_{xx} = \alpha(\alpha-1)x^{\alpha-2}y^\beta$$
$$f_{xy} = f_{yx} = \alpha\beta x^{\alpha-1}y^{\beta-1}$$
$$f_{yy} = \beta(\beta-1)x^\alpha y^{\beta-2}$$

が分かります. これから

$$\begin{aligned}\det H(f) &= \begin{vmatrix}\alpha(\alpha-1)x^{\alpha-2}y^\beta & \alpha\beta x^{\alpha-1}y^{\beta-1} \\ \alpha\beta x^{\alpha-1}y^{\beta-1} & \beta(\beta-1)x^\alpha y^{\beta-2}\end{vmatrix} \\ &= x^{2\alpha-2}y^{2\beta-2}\left(\alpha(\alpha-1)\beta(\beta-1) - \alpha^2\beta^2\right) \\ &= x^{2\alpha-2}y^{2\beta-2}\alpha\beta\left((\alpha-1)(\beta-1) - \alpha\beta\right) \\ &- x^{2\alpha-2}y^{2\beta-2}\alpha\beta(1-\alpha-\beta)\end{aligned}$$

となります.

(2) $\pi_x = \pi_y = 0$ すなわち

$$\left\{\begin{array}{lcll} p\alpha x^{\alpha-1}y^\beta - q &=& 0 & \ldots\ldots(1) \\ p\beta x^\alpha y^{\beta-1} - r &=& 0 & \ldots\ldots(2)\end{array}\right.$$

を解きます. これは

$$\left\{\begin{array}{lcll} x^{\alpha-1}y^\beta &=& \frac{q}{p\alpha} & \ldots\ldots(1)' \\ x^\alpha y^{\beta-1} &=& \frac{r}{p\beta} & \ldots\ldots(2)'\end{array}\right.$$

と必要十分です. $(1)'/(2)'$ から

$$x^{-1}y = \frac{q}{r}\cdot\frac{\beta}{\alpha} \quad 従って \quad y = \frac{q}{r}\cdot\frac{\beta}{\alpha}x$$

となりますが, これを (1)' に代入すると

$$x^{\alpha-1}\left(\frac{q}{r}\cdot\frac{\beta}{\alpha}\right)^\beta x^\beta = \frac{q}{p\alpha}$$

から

$$\begin{aligned}x^{\alpha+\beta-1} &= \frac{q}{p\alpha}\cdot\frac{r^\beta}{q^\beta}\cdot\frac{\alpha^\beta}{\beta^\beta} \\ &= \left(\frac{\alpha}{q}\right)^{\beta-1}\left(\frac{r}{\beta}\right)^\beta\cdot\frac{1}{p}\end{aligned}$$

から

$$x = \left(\frac{\alpha}{q}\right)^{\frac{\beta-1}{\alpha+\beta-1}}\left(\frac{r}{\beta}\right)^{\frac{\beta}{\alpha+\beta-1}}\cdot\left(\frac{1}{p}\right)^{\frac{1}{\alpha+\beta-1}}$$

同様に

$$y = \left(\frac{q}{\alpha}\right)^{\frac{\alpha}{\alpha+\beta-1}}\left(\frac{r}{\beta}\right)^{\frac{\alpha-1}{\alpha+\beta-1}}\cdot\left(\frac{1}{p}\right)^{\frac{1}{\alpha+\beta-1}}$$

となります.

(3) $\alpha + \beta < 1$ のとき $\alpha, \beta > 0$ から $\alpha, \beta < 1$ が従いますから

$$\pi_{xx} = pf_{xx}f_{xx} = p\alpha(\alpha-1)x^{\alpha-2}y^\beta < 0$$

が常に成立します. さらに

$$\begin{aligned}\det(H(\pi)) &= \begin{vmatrix}pf_{xx} & pf_{xy} \\ pf_{yx} & pf_{yy}\end{vmatrix} = p^2\det(H(f)) \\ &= p^2\alpha\beta(1-\alpha-\beta)x^{2\alpha-2}y^{2\beta-2} > 0\end{aligned}$$

となります. 従って (2) で求めた停留点を (x_0, y_0) とすると

$$\pi(x,y) < \pi(x_0,y_0) \quad ((x,y) \in \mathbf{R}^2_{++},\ (x,y) \neq (x_0,y_0))$$

が成立します.

IV 生産関数 $f(x,y)=x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{1}{3}}$ に対する利潤関数

$$\pi(x,y)=pf(x,y)-qx-ry$$

を最大化して生産要素需要関数

$$x(p,q,r)=\frac{p^3}{27q^2r},\quad y(p,q,r)=\frac{p^3}{27qr^2}$$

を求めました．利潤関数

$$\Pi(p,q,r)=\pi(x(p,q,r),y(p,q,r))$$

生産物供給関数

$$z(p,q,r)=f(x(p,q,r),y(p,q,r))$$

を定義すると

$$z(p,q,r)=\frac{\partial\Pi}{\partial p},\quad x(p,q,r)=-\frac{\partial\Pi}{\partial q},\quad y(p,q,r)=-\frac{\partial\Pi}{\partial r}$$

が成立することを、具体的に両辺を計算することで示しましょう．

解答

$$\begin{aligned}\Pi(p,q,r)&=r\cdot\left(\frac{p^3}{27q^2r}\right)^{\frac{1}{3}}\left(\frac{p^3}{27qr^2}\right)^{\frac{1}{3}}-q\cdot\frac{p^3}{27q^2r}-r\cdot\frac{p^3}{27qr^2}\\&=\frac{p^3}{9qr}-\frac{p^3}{279r}-\frac{p^3}{27qr}\\&=\frac{p^3}{27qr}\\z(p,q,r)&=\left(\frac{p^3}{27q^2r}\right)^{\frac{1}{3}}\left(\frac{p^3}{27qr^2}\right)^{\frac{1}{3}}=\frac{p^2}{9qr}\end{aligned}$$

となります．これから

$$\begin{aligned}\frac{\partial\Pi}{\partial p}&=\frac{3p^2}{27qr}=\frac{p^2}{9qr}=z(p,q,r)\\\frac{\partial\Pi}{\partial q}&=-\frac{p^3}{27q^2r}=-x(p,q,r)\\\frac{\partial\Pi}{\partial q}&=-\frac{p^3}{27qr^2}=-y(p,q,r)\end{aligned}$$

と Hotelling の補題が成立することが分かります.

V $\alpha, \beta > 0$, $\rho > 0$ を定数として CES 関数を

$$Y = F(K, L) = (\alpha K^\rho + \beta L^\rho)^{\frac{1}{\rho}} \tag{7}$$

と定義します．**(1)** $\log F(K, L)$ を K, L で微分して $F_K(K, L)$, $F_L(K, L)$ を求めましょう．
(2) $F(K, L)$ が Euler の等式

$$K \cdot F_K(K, L) + L \cdot F_L(K, L) = F(K, L) \tag{8}$$

を満たすことを示しましょう．

解答 (1)

$$\log F(K, L) = \frac{1}{\sigma} \cdot \log(\alpha K^\sigma + \beta L^\sigma)$$

の両辺を K, L で偏微分すると

$$\frac{F_K(K, L)}{F(K, L)} = \frac{1}{\sigma} \cdot \frac{\sigma \alpha K^{\sigma-1}}{\alpha K^\sigma + \beta L^\sigma} = \frac{\alpha K^{\sigma-1}}{\alpha K^\sigma + \beta L^\sigma}$$
$$\frac{F_L(K, L)}{F(K, L)} = \frac{1}{\sigma} \cdot \frac{\sigma \beta L^{\sigma-1}}{\alpha K^\sigma + \beta L^\sigma} = \frac{\alpha L^{\sigma-1}}{\alpha K^\sigma + \beta L^\sigma}$$

となります．これから

$$F_K(K, L) = \frac{\alpha K^{\sigma-1}}{\alpha K^\sigma + \beta L^\sigma} \cdot F(K, L)$$
$$F_L(K, L) = \frac{\beta L^{\sigma-1}}{\alpha K^\sigma + \beta L^\sigma} \cdot F(K, L)$$

となります．
(2)(1) の最後の 2 式にそれぞれ K と L を掛けて加えると

$$K \cdot F_K(K, L) + L \cdot F_L(K, L) = \frac{\alpha K^\sigma + \beta L^\sigma}{\alpha K^\sigma + \beta L^\sigma} \cdot F(K, L) = F(K, L)$$

から $F(K, L)$ が Euler の等式を満たすことが分かります．

VI $p, q, r > 0$ とします．生産関数

$$f(x, y) = x^{\frac{1}{3}} y^{\frac{1}{2}}$$

に対して利潤関数

$$\pi(x, y) = r f(x, y) - px - qy$$

を考えます．$\pi(x, y)$ の停留点を求めましょう．

解答

$$\pi(x, y) = r x^{\frac{1}{3}} y^{\frac{1}{2}} - px - qy$$

を偏微分すると

$$\pi_x = \frac{r}{3} \cdot x^{-\frac{2}{3}} y^{\frac{1}{2}} - p = 0, \quad \pi_y = \frac{r}{3} \cdot x^{\frac{1}{3}} y^{-\frac{1}{2}} - q = 0$$

となります．これは整理すると

$$x^{-\frac{2}{3}}y^{\frac{1}{2}} = \frac{3p}{r} \tag{1}$$
$$x^{\frac{1}{3}}y^{-\frac{1}{2}} = \frac{2q}{r} \tag{2}$$

となります．(1)× (2) から

$$x^{-\frac{1}{3}} = \frac{6pq}{r^2} \quad 従って \quad x = \frac{r^6}{2^3 3^3 p^3 q^3}$$

となります．さらに

$$y^{\frac{1}{2}} = x^{\frac{2}{3}}\frac{3p}{r} = \frac{r^3}{12pq^2} \quad 従って \quad y = \frac{r^6}{144p^2q^4}$$

となります．

VII 曲線 $x^2+xy+y^2-x+2y=0$ が回転座標変換 $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$ によっていかなる式で表されるか考えましょう．

解答

$$\begin{cases} x = \frac{1}{\sqrt{2}}(X-Y) \\ y = \frac{1}{\sqrt{2}}(X+Y) \end{cases}$$

から

$$x+y = \sqrt{2}X, \quad xy = \frac{1}{2}(X^2-Y^2)$$

となります．これから

$$\begin{aligned} x^2+xy+y^2-x+2y &= 2X^2 - \frac{1}{2}(X^2-Y^2) - \frac{1}{\sqrt{2}}(X-Y) + 2\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}(X+Y) \\ &= \frac{3}{2}X^2 + \frac{1}{2}Y^2 + \frac{1}{\sqrt{2}}X + \frac{3}{\sqrt{2}}X \end{aligned}$$

となります．

VIII 曲線 $x^2+3xy+y^2-1=0$ が回転座標変換 $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$ によっていかなる式で表されるか考えましょう．

解答

$$\begin{cases} x = \frac{1}{\sqrt{2}}(X-Y) \\ y = \frac{1}{\sqrt{2}}(X+Y) \end{cases}$$

から

$$x+y = \sqrt{2}X, \quad xy = \frac{1}{2}(X^2-Y^2)$$

となります．これから

$$x^2+3xy+y^2-1 = 2X^2 + \frac{1}{2}(X^2-Y^2) - 1 \qquad = \frac{5}{2}X^2 - \frac{1}{2}Y^2 - 1$$

となります.

V 以下の関数が第 1 象限 $\mathbf{R}^2_{++}$ 上で Euler 方程式を満たすことを示しましょう.
(1) $u(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$, **(2)** $u(x,y)=x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{2}{3}}$

解答 (1)

$$\begin{aligned} u_x &= \frac{1}{2}\cdot\frac{2x}{\sqrt{x^2+y^2}}=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ u_y &= \frac{1}{2}\cdot\frac{2y}{\sqrt{x^2+y^2}}=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \end{aligned}$$

となりますから

$$\begin{aligned} xu_x+yu_y &= \frac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2}}+\frac{y^2}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ &= \frac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2}}=\sqrt{x^2+y^2}=u \end{aligned}$$

となりますから $u(x,y)$ は Euler の等式を満たすことが分かります.

(2)

$$u_x=\frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}y^{\frac{2}{3}},\quad u_y=\frac{2}{3}x^{\frac{1}{3}}y^{-\frac{1}{3}}$$

から

$$\begin{aligned} xu_x+yu_y &= \frac{1}{3}x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{2}{3}}+\frac{2}{3}x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{2}{3}} \\ &= x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{2}{3}}=u \end{aligned}$$

となりますから $u(x,y)$ は Euler の等式を満たすことが分かります.

X $\alpha,\beta>0$, $\rho>0$ を定数として CES 関数を

$$Y=F(K,L)=(\alpha K^{\rho}+\beta L^{\rho})^{\frac{1}{\rho}} \tag{9}$$

と定義します. **(1)** $\log F(K,L)$ を K, L で微分して $F_K(K,L)$, $F_L(K,L)$ を求めましょう.
(2) $F(K,L)$ が Euler の等式

$$K\cdot F_K(K,L)+L\cdot F_L(K,L)=F(K,L) \tag{10}$$

を満たすことを示しましょう.

解答 (1)

$$\log F(K,L)=\frac{1}{\sigma}\cdot\log\left(\alpha K^{\sigma}+\beta L^{\sigma}\right)$$

の両辺を K, L で偏微分すると

$$\begin{aligned} \frac{F_K(K,L)}{F(K,L)} &= \frac{1}{\sigma}\cdot\frac{\sigma\alpha K^{\sigma-1}}{\alpha K^{\sigma}+\beta L^{\sigma}}=\frac{\alpha K^{\sigma-1}}{\alpha K^{\sigma}+\beta L^{\sigma}} \\ \frac{F_L(K,L)}{F(K,L)} &= \frac{1}{\sigma}\cdot\frac{\sigma\beta L^{\sigma-1}}{\alpha K^{\sigma}+\beta L^{\sigma}}=\frac{\alpha L^{\sigma-1}}{\alpha K^{\sigma}+\beta L^{\sigma}} \end{aligned}$$

となります. これから

$$\begin{aligned} F_K(K,L) &= \frac{\alpha K^{\sigma-1}}{\alpha K^{\sigma}+\beta L^{\sigma}}\cdot F(K,L) \\ F_L(K,L) &= \frac{\beta L^{\sigma-1}}{\alpha K^{\sigma}+\beta L^{\sigma}}\cdot F(K,L) \end{aligned}$$

となります.

(2)(1) の最後の 2 式にそれぞれ K と L を掛けて加えると

$$K \cdot F_K(K,L) + L \cdot F_L(K,L) = \frac{\alpha K^\sigma + \beta L^\sigma}{\alpha K^\sigma + \beta L^\sigma} \cdot F(K,L) = F(K,L)$$

から $F(K,L)$ が Euler の等式を満たすことが分かります.