第 5 講義 06 月 02 日　演習問題解答

I

次の $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbf{R}^n$ に対して

$$L = \{x\vec{a} + y\vec{b};\ x, y \in \mathbf{R}\}$$

を考えます．条件

$$||\vec{p}|| = ||\vec{q}|| = 1,\ (\vec{p}, \vec{q}) = 0$$

を満たす $\vec{p}, \vec{q} \in L$ を求めましょう．

(1) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ **(2)** $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ **(3)** $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ **(4)** $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

解答　**(1)** $\vec{b}$ の $\vec{a}$ 方向への直交射影 $\vec{w}$ は

$$\vec{w} = \frac{(\vec{a}, \vec{b})}{||\vec{a}||^2} = \frac{2}{3}\vec{a}$$

と求められます．このとき $\vec{a}$ の垂直なベクトルとして

$$\vec{b} - \vec{w} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} - \frac{2}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -5 \end{pmatrix}$$

が求まります．このとき $\vec{a}$ と $\vec{b} - \vec{w}$ を正規化した

$$\vec{p} = \frac{1}{||\vec{a}||}\vec{a} = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{q} = \frac{1}{||\vec{b} - \vec{w}||}(\vec{b} - \vec{w}) = \frac{1}{\sqrt{42}}\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -5 \end{pmatrix}$$

が L の正規直交基底となります．

(2) $\vec{b}$ の $\vec{a}$ 方向への直交射影 $\vec{w}$ は

$$\vec{w} = \frac{(\vec{a}, \vec{b})}{||\vec{a}||^2} = \frac{1}{2}\vec{a}$$

と求められます．このとき $\vec{a}$ の垂直なベクトルとして

$$\vec{b} - \vec{w} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$$

が求まります．このとき $\vec{a}$ と $\vec{b} - \vec{w}$ を正規化した

$$\vec{p} = \frac{1}{||\vec{a}||}\vec{a} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{q} = \frac{1}{||\vec{b} - \vec{w}||}(\vec{b} - \vec{w}) = \frac{1}{\sqrt{34}}\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$$

が L の正規直交基底となります.

(3) $\vec{b}$ の $\vec{a}$ 方向への直交射影 $\vec{w}$ は

$$\vec{w} = \frac{(\vec{a}, \vec{b})}{||\vec{a}||^2} = -\frac{1}{4}\vec{a}$$

と求められます．このとき $\vec{a}$ の垂直なベクトルとして

$$\vec{b} - \vec{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix}$$

が求まります．このとき $\vec{a}$ と $\vec{b} - \vec{w}$ を正規化した

$$\vec{p} = \frac{1}{||\vec{a}||}\vec{a} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \vec{q} = \frac{1}{||\vec{b} - \vec{w}||}(\vec{b} - \vec{w}) = \frac{1}{\sqrt{44}}\begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix}$$

が L の正規直交基底となります.

(4) $\vec{b}$ の $\vec{a}$ 方向への直交射影 $\vec{w}$ は

$$\vec{w} = \frac{(\vec{a}, \vec{b})}{||\vec{a}||^2} = \frac{2}{4}\vec{a} = \frac{1}{2}\vec{a}$$

と求められます．このとき $\vec{a}$ の垂直なベクトルとして

$$\vec{b} - \vec{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$$

が求まります．このとき $\vec{a}$ と $\vec{b} - \vec{w}$ を正規化した

$$\vec{p} = \frac{1}{||\vec{a}||}\vec{a} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \vec{q} = \frac{1}{||\vec{b} - \vec{w}||}(\vec{b} - \vec{w}) = \frac{1}{\sqrt{20}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$$

が L の正規直交基底となります.

II（I の続き）XII の $\vec{p}, \vec{q}$ を用いて

$$||\vec{c} - x\vec{a} - y\vec{b}||^2$$

を最小にする $x, y \in \mathbf{R}$ を求めましょう.

(1) $\vec{c} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ **(2)** $\vec{c} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ **(3)** $\vec{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ **(4)** $\vec{c} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

解説　$\vec{p}, \vec{q}$ と $\vec{a}, \vec{b}$ の間に関係

$$\vec{p} = \frac{1}{||\vec{a}||}\vec{a}$$
$$\vec{q} = \frac{1}{||\vec{b} - \vec{w}||}\left(\vec{b} - \frac{(\vec{a}, \vec{b})}{||\vec{a}||^2}\vec{a}\right)$$

があることに注意しましょう．従って

$$(\vec{p}\ \vec{q}) = (\vec{a}\ \vec{b})\begin{pmatrix} \frac{1}{||\vec{a}||} & -\frac{1}{||\vec{b}-\vec{w}||} \cdot \frac{(\vec{a},\vec{b})}{||\vec{a}||^2} \\ 0 & \frac{1}{||\vec{b}-\vec{w}||} \end{pmatrix}$$

が成立します．この等式の右辺に現れる行列を S とすると S は正則となります.

$$\xi\vec{p} + \eta\vec{q} = (\vec{p}\ \vec{q})\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} = (\vec{a}\ \vec{b})S\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix}$$
$$= (\vec{a}\ \vec{b})\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

から

$$S\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad \text{従って} \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = S^{-1}\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix}$$

が成立します．以上から任意の $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^2$ に対して一意的に $\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^2$ が存在して

$$x\vec{a} + y\vec{b} = \xi\vec{p} + \eta\vec{q}$$

が成立します．ここで $\vec{c} - \vec{v}||^2$ を最小とする $\vec{v} = x\vec{a} + y\vec{b} = \xi\vec{p} + \eta\vec{q} \in L$ を求めます.

$$\begin{aligned}
||\vec{c} - x\vec{a} - y\vec{b}||^2 &= ||\vec{c} - \xi\vec{p} - \eta\vec{q}||^2 \\
&= ||\vec{c}||^2 + \xi^2||\vec{p}||^2 + \eta^2||\vec{q}||^2 - 2\xi(\vec{c}, \vec{p}) - 2\eta(\vec{c}, \vec{q} \\
&= ||\vec{c}||^2 + \xi^2 - 2\xi(\vec{c}, \vec{p}) + +\eta^2||\vec{q}||^2 - 2\eta(\vec{c}, \vec{q} \\
&= (\xi - (\vec{c}, \vec{p}))^2 + (\eta - (\vec{c}, \vec{q}))^2 + ||\vec{c}||^2 - (\vec{c}, \vec{p})^2 - (\vec{c}, \vec{q})^2
\end{aligned}$$

から

$$\xi = (\vec{c}, \vec{p}), \quad \eta = (\vec{c}, \vec{q})$$

のとき $||\vec{x} - \xi\vec{p} - \eta\vec{q}||^2$ は最小となります．ここここで求めた

$$\vec{v} = \vec{v}_0 = (\vec{c}, \vec{p})\vec{p} + (\vec{c}, \vec{q})\vec{q}$$

が

$$\vec{v}_0 \in L, \quad (\vec{c} - \vec{v}_0) \perp L$$

を満たす $\vec{c}$ の L への直交射影となります.

解答

(1)

$$\vec{p} = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, \quad \vec{q} = \frac{1}{\sqrt{42}}\begin{pmatrix}4\\1\\-5\end{pmatrix}$$

であることがＩで示されています．これから

$$(\vec{c},\vec{p}) = \left(\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right) = \frac{1}{\sqrt{3}}, \quad (\vec{c},\vec{q}) = \left(\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{42}}\begin{pmatrix}4\\1\\-5\end{pmatrix}\right) = -\frac{5}{\sqrt{42}}$$

となります．このとき求める直交射影は

$$\begin{aligned}\vec{v}_0 &= x\vec{a} + y\vec{b} = (\vec{c},\vec{p})\vec{p} + (\vec{c},\vec{q})\vec{q} \\ &= \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} - \frac{5}{\sqrt{42}}\frac{1}{\sqrt{42}}\begin{pmatrix}4\\1\\-5\end{pmatrix} = \frac{1}{14}\begin{pmatrix}-2\\3\\13\end{pmatrix}\end{aligned}$$

となります．この式を直接 x と y について解くと

$$\left(\begin{array}{cc|c}1 & 2 & -\frac{2}{14}\\ 1 & 1 & \frac{3}{14}\\ 1 & -1 & \frac{13}{14}\end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|c}1 & 2 & -\frac{2}{14}\\ 0 & -1 & \frac{5}{14}\\ 0 & -3 & \frac{15}{14}\end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|c}1 & 2 & -\frac{2}{14}\\ 0 & 1 & -\frac{5}{14}\\ 0 & -3 & \frac{15}{14}\end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|c}1 & 0 & \frac{8}{14}\\ 0 & 1 & -\frac{5}{14}\\ 0 & 0 & 0\end{array}\right)$$

から

$$x = \frac{4}{7}, \quad y = -\frac{5}{14}$$

であることが分かります．

注意 $S = \begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{3}{\sqrt{42}} \cdot \frac{2}{3}\\ 0 & \frac{3}{\sqrt{42}}\end{pmatrix}$ を用いて

$$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{2}{\sqrt{42}}\\ 0 & \frac{3}{\sqrt{42}}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{3}}\\ -\frac{5}{\sqrt{42}}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{4}{7}\\ -\frac{5}{14}\end{pmatrix}$$

とも計算ができます．

(2)

$$\vec{p} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}, \quad \vec{q} = \frac{1}{\sqrt{34}}\begin{pmatrix}3\\4\\3\end{pmatrix}$$

であることがＩで示されています．これから

$$(\vec{c},\vec{p}) = \left(\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}\right) = -\frac{1}{\sqrt{2}}, \quad (\vec{c},\vec{q}) = \left(\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{34}}\begin{pmatrix}3\\4\\3\end{pmatrix}\right) = \frac{3}{\sqrt{34}}$$

となります．このとき求める直交射影は

$$\begin{aligned}\vec{v}_0 =& x\vec{a} + y\vec{b} = (\vec{c},\vec{p})\vec{p} + (\vec{c},\vec{q})\vec{q} \\ =& -\frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix} + \frac{3}{\sqrt{34}}\frac{1}{\sqrt{34}}\begin{pmatrix}3\\4\\3\end{pmatrix} = \frac{1}{17}\begin{pmatrix}-4\\6\\13\end{pmatrix}\end{aligned}$$

となります．この式を直接 x と y について解くと

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & -\frac{4}{17} \\ 0 & 2 & \frac{6}{17} \\ -1 & 1 & \frac{13}{17} \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & -\frac{4}{17} \\ 0 & 2 & \frac{6}{17} \\ 0 & 3 & \frac{9}{17} \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & -\frac{4}{17} \\ 0 & 1 & \frac{3}{17} \\ 0 & 3 & \frac{9}{17} \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & -\frac{2}{0}17 \\ 0 & 1 & \frac{3}{17} \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

から

$$x = -\frac{20}{17}, \quad y = \frac{3}{17}$$

であることが分かります．

注意 $S = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{2}{\sqrt{34}} \cdot \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{34}} \end{pmatrix}$ を用いて

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{34}} \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{34}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{3}{\sqrt{34}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{20}{17} \\ \frac{3}{17} \end{pmatrix}$$

とも計算ができます．

(3)

$$\vec{p} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \vec{q} = \frac{1}{\sqrt{44}}\begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix}$$

であることが I で示されています．これから

$$(\vec{c}, \vec{p}) = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right) = \frac{1}{2}, \quad (\vec{c}, \vec{q}) = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{44}}\begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix}\right) = \frac{5}{\sqrt{44}}$$

となります．このとき求める直交射影は

$$\begin{aligned} \vec{v}_0 &= x\vec{a} + y\vec{b} = (\vec{c}, \vec{p})\vec{p} + (\vec{c}, \vec{q})\vec{q} \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \frac{5}{\sqrt{44}}\frac{1}{\sqrt{44}}\begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix} = \frac{1}{11}\begin{pmatrix} 9 \\ 4 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

となります．この式を直接 x と y について解くと

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & \frac{9}{11} \\ 1 & 0 & \frac{4}{11} \\ 1 & -1 & -\frac{1}{11} \\ -1 & 1 & \frac{1}{11} \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|c} 0 & 1 & \frac{5}{11} \\ 1 & 0 & \frac{4}{11} \\ 0 & 1 & -\frac{5}{11} \\ 0 & -1 & \frac{5}{11} \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & \frac{4}{11} \\ 0 & 1 & \frac{5}{11} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

から

$$x = \frac{4}{11}, \quad y = \frac{5}{11}$$

であることが分かります．

注意 $S = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{4}{\sqrt{44}} \cdot \left(-\frac{1}{4}\right) \\ 0 & \frac{4}{\sqrt{44}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{\sqrt{44}} \\ 0 & \frac{4}{\sqrt{44}} \end{pmatrix}$ を用いて

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{\sqrt{44}} \\ 0 & \frac{4}{\sqrt{44}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{5}{\sqrt{44}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{4}{11} \\ \frac{5}{11} \end{pmatrix}$$

とも計算ができます.

(4)

$$\vec{p} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\1\\1\\-1\end{pmatrix}, \quad \vec{q} = \frac{1}{\sqrt{20}}\begin{pmatrix}1\\-1\\3\\3\end{pmatrix}$$

であることが I で示されています. これから

$$(\vec{c},\vec{p}) = \left(\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}, \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\1\\1\\-1\end{pmatrix}\right) = -\frac{1}{2}, \quad (\vec{c},\vec{q}) = \left(\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{20}}\begin{pmatrix}1\\-1\\3\\3\end{pmatrix}\right) = \frac{3}{\sqrt{20}}$$

のとき最小値をとります. このとき求める直交射影は

$$\begin{aligned}\vec{v}_0 &= x\vec{a} + y\vec{b} = (\vec{c},\vec{p})\vec{p} + (\vec{c},\vec{q})\vec{q} \\ &= -\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\1\\1\\-1\end{pmatrix} + \frac{3}{\sqrt{20}}\frac{1}{\sqrt{(20)}}\begin{pmatrix}1\\-1\\3\\3\end{pmatrix} = \frac{1}{10}\begin{pmatrix}-1\\-4\\2\\7\end{pmatrix}\end{aligned}$$

となります. この式を直接 x と y について解くと

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & -\frac{1}{10} \\ 1 & 0 & -\frac{4}{10} \\ 1 & 2 & \frac{2}{10} \\ -1 & 1 & \frac{7}{10}\end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|c} 0 & 1 & \frac{3}{10} \\ 1 & 0 & -\frac{4}{10} \\ 0 & 2 & \frac{6}{10} \\ 0 & 1 & \frac{3}{10}\end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & -\frac{4}{10} \\ 0 & 1 & \frac{3}{10} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0\end{array}\right)$$

から

$$x = -\frac{4}{10}, \quad y = \frac{3}{10}$$

であることが分かります.

注意 $S = \begin{pmatrix}\frac{1}{2} & -\frac{2}{\sqrt{20}}\cdot\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{20}}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{1}{2} & -\frac{1}{\sqrt{20}} \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{20}}\end{pmatrix}$ を用いて

$$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{1}{2} & -\frac{1}{\sqrt{20}} \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{20}}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-\frac{1}{2} \\ \frac{3}{\sqrt{20}}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-\frac{4}{10} \\ \frac{3}{10}\end{pmatrix}$$

とも計算ができます.

III 次の $\vec{a},\vec{b} \in \mathbf{R}^n$ に対して 2 列の行列 $X = (\vec{a}\ \vec{b})$ を定めます. ${}^tXX$ と $\det({}^tXX)$ を求めましょう.

(1) $\vec{a} = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix}2\\1\\-1\end{pmatrix}$, **(2)** $\vec{a} = \begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix}2\\-2\\2\end{pmatrix}$,

(3) $\vec{a} = \begin{pmatrix}1\\1\\1\\-1\end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix}1\\0\\-1\\1\end{pmatrix}$

解答　$X = (\vec{a}\ \vec{b})$ に対して

$$
{}^t XX = \begin{pmatrix} {}^t\vec{a} \\ {}^t\vec{b} \end{pmatrix} (\vec{a}\ \vec{b}) = \begin{pmatrix} {}^t\vec{a}\cdot\vec{a} & {}^t\vec{a}\cdot\vec{b} \\ {}^t\vec{b}\cdot\vec{a} & {}^t\vec{b}\cdot\vec{b} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ||\vec{a}||^2 & (\vec{a},\vec{b}) \\ (\vec{b},\vec{a}) & ||\vec{b}||^2 \end{pmatrix}
$$

となることに注意しましょう．ここで $\vec{a},\vec{b} \in \mathbf{R}^n$ に対して

$$
{}^t\vec{a}\cdot\vec{b} = (\vec{a},\vec{b})
$$

であることを用いました．ここで計算する ${}^t XX$ を X の Gram 行列と呼びます.

(1)

$$
{}^t XX = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}, \quad \det({}^t XX) = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} = 14
$$

(2)

$$
{}^t XX = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 6 & 12 \end{pmatrix}, \quad \det({}^t XX) = \begin{vmatrix} 3 & 6 \\ 6 & 12 \end{vmatrix} = 0
$$

(3)

$$
{}^t XX = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad \det({}^t XX) = \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 11
$$

注意　上の $X = (\vec{a}\ \vec{b})$ に対して

$$
{}^t XX \text{ が正則 } \Leftrightarrow \vec{a} \nparallel \vec{b}
$$

が成立します．$\det({}^t XX)$ の値に注意しましょう．

IV f は $\mathbf{R}$ 上の微分可能な関数とします.
(1) $F(x,y) := f(x^2+y^2)$ と $\mathbf{R}^2$ 上の関数を定義します．$\nabla(F)(x,y)$ を求めましょう．
(2) $y \neq 0$ のとき $G(x,y) := f(\frac{x}{y})$ を定義します．$\nabla(G)(x,y)$ を求めましょう．

解答 (1)

$$
\begin{aligned}
F_x &= f'(x^2+y^2)\cdot 2x \\
F_y &= f'(x^2+y^2)\cdot 2y
\end{aligned}
$$

から

$$
\nabla(F)(x,y) = 2f'(x^2+y^2)\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right)
$$

(2)

$$
\begin{aligned}
G_x &= f'(\frac{x}{y})\cdot\frac{1}{y} \\
G_y &= f'(\frac{x}{y})\cdot\left(-\frac{x}{y^2}\right)
\end{aligned}
$$

から

$$
\nabla(G)(x,y) = f'(\frac{x}{y})\begin{pmatrix} \frac{1}{y} \\ -\frac{x}{y^2} \end{pmatrix} = \frac{1}{y^2}f'(\frac{x}{y})\left(\begin{smallmatrix} y \\ -x \end{smallmatrix}\right)
$$

V(1) $f(x,y,z) = e^x + e^{2y} + e^{3z}$ とします．$\nabla(f)(0,0,0)$ を求めましょう．</dd>
(2) $g(x,y,z) = e^{x+2y+3z}$ とします．$\nabla(g)(0,0,0)$ を求めましょう．

解答 (1)

$$f_x = e^x$$
$$f_y = 2e^{2y}$$
$$f_z = 3e^{3z}$$

から

$$\nabla(f)(0,0,0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

(2)

$$g_x = e^{x+2y+3z}$$
$$g_y = 2e^{x+2y+3z}$$
$$g_z = 3e^{x+2y+3z}$$

から

$$\nabla(g)(0,0,0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

VI f の P_0 における $\vec{v}$ 方向の微分 $D_{\vec{v}}(f)(\mathrm{P}_0)$ を求めましょう．
(1) $f(x,y) = x + 2y - 1$ at $\mathrm{P}_0(1,2)$ in the direction $\vec{v} = \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$
(2) $f(x,y) = x^2 + 2xy - y^3$ at $\mathrm{P}_0(1,1)$ in the direction $\vec{v} = \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 3 \end{smallmatrix}\right)$

解答 (1)

$$f_x = 1, \quad f_y = 2$$

から

$$D_{\vec{v}}(f)(\mathrm{P}_0) = 1 \cdot 1 + 1 \cdot 2 = 3$$

(2)

$$f_x = 2x + y, \quad f_y = x - 3y^2$$

から

$$f_x(1,1) = 3, \quad f_y(1,1) = -2$$

となるので

$$D_{\vec{v}}(f)(\mathrm{P}_0) = 1 \cdot 3 + 3 \cdot (-2) = -3$$

VII $\mathbf{R}^2$ の開集合 U 上で定義された関数 $f(x,y)$ が与えられているとします．他方 U の中に C^2 級の曲線 $(x(t), y(t))$ が与えられているとします．このとき

$$F(t) := f(x(t), y(t))$$

を定義します．このとき

$$F''(t) := \left(H(f)(x(t),y(t)) \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix}\right) + \left(\nabla(f)(x(t),y(t)), \begin{pmatrix} x''(t) \\ y''(t) \end{pmatrix}\right)$$

が成立することを示しましょう．

解答

$$F'(t) = f_x((x(t),y(t)) \cdot x'(t) + f_y((x(t),y(t)) \cdot y'(t)$$

をもう一度 t で微分すると

$$\begin{aligned}
F''(t) &= (f_{xx}((x(t),y(t)) \cdot x'(t) + f_{xy}((x(t),y(t)) \cdot y'(t)) \cdot x'(t) + f_x((x(t),y(t)) \cdot x''(t) \\
&\quad + (f_{yx}((x(t),y(t)) \cdot x'(t) + f_{yy}((x(t),y(t)) \cdot y'(t)) \cdot y'(t) + f_y((x(t),y(t)) \cdot y''(t) \\
&= f_{xx}((x(t),y(t)) \cdot (x'(t))^2 + 2f_{xy}((x(t),y(t)) \cdot x'(t)y'(t) + f_{yy}((x(t),y(t)) \cdot (y'(t))^2 \\
&\quad + f_x((x(t),y(t)) \cdot x''(t) + f_y((x(t),y(t)) \cdot y''(t) \\
&= \left(\begin{pmatrix} f_{xx}((x(t),y(t)) & f_{xy}((x(t),y(t)) \\ f_{yx}((x(t),y(t)) & f_{yy}((x(t),y(t)) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix}\right) + \left(\begin{pmatrix} f_x((x(t),y(t)) \\ f_y((x(t),y(t)) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x''(t) \\ y''(t) \end{pmatrix}\right) \\
&= \left(H(f)(x(t),y(t)) \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix}\right) + \left(\nabla(f)(x(t),y(t)), \begin{pmatrix} x''(t) \\ y''(t) \end{pmatrix}\right)
\end{aligned}$$

VIII 第 1 象限

$$\mathbf{R}^2_{++} = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2;\ x,y > 0\}$$

の上で定義されている関数は

$$f(tx,ty) = t^\lambda f(x,y) \quad (t > 0,\ (x,y) \in \mathbf{R}^2_{++})$$

が成立するとき λ 斉次であるといいます.

(1) この状況で，さらに f が $\mathbf{R}^2_{++}$ で C^1 級ならば

$$xf_x(x,y) + yf_y(x,y) = \lambda f(x,y) \quad ((x,y) \in \mathbf{R}^2_{++}) \tag{EQ}$$

が成立することを示しましょう.

(2) 逆に $\mathbf{R}^2$ 上で C^1 級の f が (EQ) を満たすならば f は λ 次斉次であることを示しましょう.

解答 (1)

$$f(tx,ty) = t^\lambda f(x,y) \quad (t > 0,\ (x,y) \in \mathbf{R}^2_{++})$$

の両辺を t で微分すると

$$f_x(tx,ty) \cdot x + f_y(tx,ty) \cdot y = \lambda t^{\lambda-1} f(x,y) \quad (t > 0,\ (x,y) \in \mathbf{R}^2_{++})$$

となります．これに $t = 1$ を代入すると

$$xf_x(x,y) + yf_y(x,y) = \lambda f(x,y) \quad ((x,y) \in \mathbf{R}^2_{++}) \tag{EQ}$$

となります.

(2)

$$\begin{aligned}
\left(t^{-\lambda} f(tx,ty)\right)' &= -\lambda t^{-\lambda-1} f(tx,ty) + t^{-\lambda} \cdot (f_x(tx,ty)x + f_y(tx,ty)y) \\
&= -\lambda t^{-\lambda-1} f(tx,ty) + t^{-\lambda} \left(t^{-1} \lambda f(tx,ty)\right) \\
&\equiv 0
\end{aligned}$$

から t に関して $t^{-\lambda} f(tx,ty)$ は一定となります．従って

$$t^{-\lambda} f(tx,ty) = f(x,y) \quad \text{すなわち} \quad f'tx,ty) = t^\lambda f(x,y)$$

であることが分かります.