第 4 講義 05 月 26 日　演習問題解答

I

(1) $P_{13}(\lambda) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \lambda \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ とします.

(i) $P_{13}(\lambda)P_{13}(\mu)$ を計算しましょう.

(ii) $P_{13}(\lambda)$ が正則であることを示して $P_{13}(\lambda)^{-1}$ を求めましょう.

(2) $Q = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ とします.

(i) Q^2 を計算しましょう. **(ii)** Q が正則であることを求めて Q^{-1} を求めましょう.

解答 (1)

$$P_{13}(\lambda)P_{13}(\mu) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \lambda \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \mu \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \lambda+\mu \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = P_{13}(\lambda+\mu)$$

となります. これを用いると $P_{13}(0) = I_3$ から

$$P_{13}(\lambda)P_{13}(-\lambda) = P_{13}(-\lambda)P_{13}(\lambda) = P_{13}(0) = I_3$$

から $P_{13}(\lambda)$ は正則で $P_{13}(\lambda)^{-1} = P_{13}(-\lambda)$ であることが分かります.

(2)

$$Q^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I_3$$

から Q は正則で $Q^{-1} = Q$ であることが分かります.

II

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix},\ \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

に対して $||\vec{a} - t\vec{b}||^2$ を最小にする t を求めましょう.

解答

$$||\vec{a}||^2 = 1 + 4 + 9 + 16 = 30$$
$$(\vec{a}, \vec{b}) = 1 + (-2) + 3 + 4 = 6$$
$$||\vec{b}||^2 = 1 + 1 + 1 + 1 = 4$$

から

$$\begin{aligned}||\vec{a}-t\vec{b}||^2 &= ||\vec{a}||^2 - 2t(\vec{a},\vec{b}) + ||\vec{b}||^2 \\ &= 4t^2 - 12t + 30 = 4\left(t-\frac{3}{2}\right)^2 + 21\end{aligned}$$

となります．従って $t=\frac{3}{2}$ のとき最小値 21 を取ります．

III

$$\vec{a}=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix},\ \vec{b}=\begin{pmatrix}2\\-1\\-1\end{pmatrix},\ \vec{g}=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$$

とします．

(1) $(\vec{a},\vec{b})=0$ であることを示しましょう．

(2) $||\vec{g}-x\vec{a}-y\vec{b}||^2$ を最小にする x, y を求めましょう．

解答 (1)

$$(\vec{a},\vec{b}) = 1\cdot 2 + 1\cdot(-1) + 1\cdot(-1) = 2-1-1 = 0$$

(2)

$$\begin{aligned}||\vec{g}-x\vec{a}-y\vec{b}||^2 &= ||\vec{g}||^2 - 2(\vec{g}, x\vec{a}+y\vec{b}) + ||x\vec{a}+y\vec{b}||^2 \\ &= ||\vec{g}||^2 - 2x(\vec{g},\vec{a}) - 2y(\vec{g},\vec{b}) + ||x\vec{a}||^2 + 2(x\vec{a}, y\vec{b}) + ||y\vec{b}||^2 \\ &= ||\vec{g}||^2 - 2x(\vec{g},\vec{a}) - 2y(\vec{g},\vec{b}) + x^2||\vec{a}||^2 + 2xy(\vec{a},\vec{b}) + y^2||\vec{b}||^2 \\ &= 1^2 - 2x\cdot 1 - 2y(-1) + x^2\cdot 3 + 2xy\cdot 0 + y^2\cdot 6 \\ &= 3x^2 - 2x + 6y^2 + 2y + 1 \\ &= 3\left(x-\frac{1}{3}\right)^2 + 6\left(y+\frac{1}{6}\right)^2 + 1 - \frac{1}{3} - \frac{1}{6} \\ &= 3\left(x-\frac{1}{3}\right)^2 + 6\left(y+\frac{1}{6}\right)^2 + \frac{1}{2}\end{aligned}$$

から $x=\frac{1}{3},\ y=-\frac{1}{6}$ のとき最小値 $\frac{1}{2}$ を取ります．

IV $R_1, R_2 \in M_2(\mathbf{R})$ を直交行列であるとします．このとき R_1R_2 と ${}^tR_1$ が直交であることを証明しましょう．

解答

$${}^t(R_1R_2)R_1R_2 = {}^tR_2{}^tR_1R_1R_2 = {}^tR_2I_2R_2 = {}^tR_2R_2 = I_2$$

$$R_1R_2{}^t(R_1R_2) = R_1R_2{}^tR_2{}^tR_1 = R_1I_2{}^tR_1 = R_1{}^tR_1 = I_2$$

から R_1R_2 が直交であることが分かります．他方

$${}^t\left({}^tR_1\right){}^tR_1 = R_1{}^tR_1 = I_2$$

$$ {}^tR_1{}^t\left({}^tR_1\right) = {}^tR_1R_1 = I_2 $$

から ${}^tR_1$ が直交であることが分かります.

V $R \in M_2(\mathbf{R})$ が回転行列ならば $R^{-1} = {}^tR$ であることを示しましょう.

解答 $R = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ とします. このとき $|R| = \cos^2\theta + \sin\theta^2\theta = 1 \neq 0$ から

$$ R^{-1} = \frac{1}{1}\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} = {}^tR $$

であることが分かります.

VI 次の行列の積を計算しましょう.（計算の意味を考えてみましょう.）

$$ \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\beta & \sin\beta \\ \sin\beta & -\cos\beta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} $$

解答

$$ \begin{aligned} & \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\beta & \sin\beta \\ \sin\beta & -\cos\beta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos\alpha\sin\beta + \sin\alpha\sin\beta & \cos\alpha\sin\beta - \sin\alpha\cos\beta \\ -\sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta & -\sin\alpha\sin\beta - \cos\alpha\cos\beta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos(\beta-\alpha) & \sin(\beta-\alpha) \\ \sin(\beta-\alpha) & -\cos(\beta-\alpha) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos(\beta-\alpha)\cos\alpha + \sin(\beta-\alpha)\sin\alpha & -\cos(\beta-\alpha)\sin\alpha + \sin(\beta-\alpha)\cos\alpha \\ \sin(\beta-\alpha)\cos\alpha - \cos(\beta-\alpha)\sin\alpha & -\sin(\beta-\alpha)\sin\alpha - \cos(\beta-\alpha)\cos\alpha \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos(\beta-2\alpha) & \sin(\beta-2\alpha) \\ \sin(\beta-2\alpha) & -\cos(\beta-2\alpha) \end{pmatrix} \end{aligned} $$

VII $g(x,y) = x^2 - y^2 - 1 = 0$ をその上の点 $(2, \sqrt{3})$ の近傍で解いて

$$ \varphi(x) = \sqrt{x^2-1} \tag{3} $$

とします. $\varphi'(2)$ を g の 1 階の偏微分係数を用いて求めましょう.

解答

$$ g_x = 2x,\ g_y = -2y $$

と計算します. このとき

$$ \varphi'(2) = -\frac{g_x(2,\sqrt{3})}{g_y(2,\sqrt{3})} = -\frac{4}{(-2\sqrt{3})} = \frac{2}{\sqrt{3}} $$

と計算されます.

VIII Cobb-Douglas 型生産関数

$$Q = F(K, L) = 4K^{\frac{3}{4}}L^{\frac{1}{4}} \tag{4}$$

に対して $F(10^4 + 100, 625 + (-15))$ の近似値を $K = 10^4$, $L = 625$ における MPK,MPL を用いて求めましょう．電卓でも計算してみましょう．

解答

$$F_K(K, L) = 3K^{-\frac{1}{4}}L^{\frac{1}{4}}, \quad F_L(K, L) = K^{\frac{3}{4}}L^{-\frac{3}{4}}$$

から $K = 10^4$, $L = 625 = 5^4$ において MPK, MPL が

$$\begin{aligned} MPK &= F_K(10^4, 5^4) = 3 \times \left(10^4\right)^{-\frac{1}{4}} \times \left(5^4\right)^{\frac{1}{4}} \\ &= 3 \times 10^{-1} \times 5 = 1.5 \\ MPL &= F_L(10^4, 5^4) = \left(10^4\right)^{\frac{3}{4}} \times \left(5^4\right)^{-\frac{3}{4}} \\ &= 10^3 \times 5^{-3} = 8 \end{aligned}$$

と計算されます．さらに

$$F(10^4, 5^4) = 4 \times \left(10^4\right)^{\frac{3}{4}} \times \left(5^4\right)^{\frac{1}{4}} = 4 \times 10^3 \times 5 = 2.0 \times 10^4$$

も計算できます．以上の準備の下で $F(10^4 + 100, 5^4 + (-15))$ の近似値を求めると

$$\begin{aligned} F(10^4 + 100, 5^4 + (-15)) &\approx F(10^4, 5^4) + F_K(10^4, 5^4) \times 100 + F_L(10^4, 5^4) \times (-15) \\ &= 2.0 \times 10^4 + 1.5 \times 100 + 8 \times (-15) \\ &= 20,030 \end{aligned}$$

となります．Google Chrome で計算してみると

$$F(10^4 + 100, 5^4 + (-15)) = 20,027.81$$

となります．

IX ある工場が非熟練労働 x 時間，熟練労働 y 時間を使ってある生産物を

$$Q = F(x, y) = 60x^{\frac{2}{3}}y^{\frac{1}{3}}$$

単位生産していて，現在 $x = 64$, $y = 27$ となっているとします．

(1) 現在の生産量を求めましょう．

(2) どの方向に (x, y) を変化させれば Q が最も増加するでしょうか？

(3) 熟練労働を 1.5 時間増加させるが，生産レベルを保つとします．非熟練労働はどのように変化させることになるか近似値を求めましょう．

解答 (1) $64 = 4^3, 27 = 3^3$ に注意します．すると

$$F(64, 27) = 60 \times \left(4^3\right)^{\frac{2}{3}} \times \left(3^3\right)^{\frac{1}{3}} = 60 \times 4^2 \times 3 = 2,880$$

と現在の生産量が求められます.

(2)

$$F_x = 60 \times \frac{2}{3} x^{-\frac{1}{3}} \times y^{\frac{1}{3}} = 40 \times x^{-\frac{1}{3}} \times y^{\frac{1}{3}}$$
$$F_x = 60 \times x^{\frac{2}{3}} \times \frac{1}{3} y^{-\frac{2}{3}} = 20 \times x^{\frac{2}{3}} \times y^{-\frac{2}{3}}$$

から

$$F_x(64,27) = 40 \times \left(4^3\right)^{-\frac{1}{3}} \times \left(3^3\right)^{\frac{1}{3}} = 40 \times \frac{1}{4} \times 3 = 30$$
$$F_y(64,27) = 20 \times \left(4^3\right)^{\frac{2}{3}} \times \left(3^3\right)^{-\frac{2}{3}} = 20 \times 4^2 \times 3^{-2} = \frac{320}{9}$$

と計算されます. これから

$$\nabla(F)(64,27) = \begin{pmatrix} 30 \\ \frac{320}{9} \end{pmatrix}$$

の方向が Q を最も増加させる方向です.

(3) 等量曲線

$$F(x,y) = F(64,27)$$

の $(x,y) = (64,27)$ における接線

$$30(x-64) + \frac{320}{9}(y-27) = 0$$

上で近似的に考えます. 熟練労働の時間を $y = 27 + 1.5$ とすると

$$\begin{aligned} x - 64 &= -\frac{320}{9} \times \frac{1}{30} \times 1.5 \\ &= -\frac{16}{9} = -1.77\ldots \end{aligned}$$

となりますから非熟練労働の時間を $1.77\ldots$ 時間減らすことになります.

X 曲線 $g(x,y) := x^2 - xy + y^2 - 1$ を $(1,1)$ の近傍で解いた

$$y = \varphi(x) = \frac{x + \sqrt{4 - 3x^2}}{2}$$

に対して $\varphi'(1)$ を g の 1 階の偏微分係数を用いて求めましょう.

解答

$$g_x = 2x - y, \quad g_y = -x + 2y$$

となります. これから

$$\varphi'(1) = -\frac{g_x(1,1)}{g_y(1,1)} = -\frac{2-1}{-1+2} = -1$$

であることが分かります.