経済数学 2020 年 5 月 19 日演習問題

I 次の行列の積を求めましょう．

(1) $\begin{pmatrix} a_1 & c_1 \\ 0 & b_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_2 & c_2 \\ 0 & b_2 \end{pmatrix}$ **(2)** $\begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ c_1 & b_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_2 & 0 \\ c_2 & b_2 \end{pmatrix}$ **(3)** $\begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & b_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_2 & 0 \\ 0 & b_2 \end{pmatrix}$

解答

(1) $\begin{pmatrix} a_1 & c_1 \\ 0 & b_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_2 & c_2 \\ 0 & b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1a_2 & a_1c_2 + c_1b_2 \\ 0 & b_1b_2 \end{pmatrix}$

(2) $\begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ c_1 & b_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_2 & 0 \\ c_2 & b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1a_2 & 0 \\ c_1a_2 + b_1c_2 & b_1b_2 \end{pmatrix}$

(3) $\begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & b_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_2 & 0 \\ 0 & b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1a_2 & 0 \\ 0 & b_1b_2 \end{pmatrix}$

II A, P は 2 次正方行列とします．P が正則であるとき，帰納法を用いて

$$(P^{-1}AP)^n = P^{-1}A^nP$$

であることを示しましょう．

解答

$$(P^{-1}AP)^n = P^{-1}A^nP$$

とすると

$$\begin{aligned}(P^{-1}AP)^{n+1} &= (P^{-1}AP)^n(P^{-1}AP)\\ &= P^{-1}A^nP \cdot P^{-1}AP\\ &= P^{-1}A^n(PP^{-1})AP\\ &= P^{-1}A^nI_2AP = P^{-1}A^nAP = P^{-1}A^{n+1}P\end{aligned}$$

から帰納法によりすべての自然数 n に対して

$$(P^{-1}AP)^n = P^{-1}A^nP$$

が成立する．

IV (1) $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ \lambda & 1 \end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ \mu & 1 \end{smallmatrix}\right)$ を計算して $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ \lambda & 1 \end{smallmatrix}\right)$ が正則であることを示しましょう．

(2) $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 & \lambda \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 & \mu \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ を計算して $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 & \lambda \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ が正則であることを示しましょう．

解答 (1)

$$\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ \lambda & 1 \end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ \mu & 1 \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ \lambda+\mu & 1 \end{smallmatrix}\right)$$

から

$$\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ \lambda & 1 \end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ -\lambda & 1 \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ -\lambda & 1 \end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ \lambda & 1 \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) = I_2$$

となりますから $\left(\begin{smallmatrix}1&0\\\lambda&1\end{smallmatrix}\right)$ は正則であることが分かります.

(2)

$$\begin{pmatrix}1&0&\lambda\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&\mu\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&\lambda+\mu\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

から

$$\begin{pmatrix}1&0&\lambda\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&-\lambda\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&-\lambda\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&\lambda\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=I_3$$

となりますから $\begin{pmatrix}1&0&\lambda\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$ は正則であることが分かります.

IV(1) $Q=\begin{pmatrix}\cos\theta&\sin\theta\\\sin\theta&-\cos\theta\end{pmatrix}$ に対して Q^2 を求めましょう.
(2) (1) を用いて Q^{-1} を求めましょう.

解答 (1)

$$Q^2=\begin{pmatrix}\cos\theta&\sin\theta\\\sin\theta&-\cos\theta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos\theta&\sin\theta\\\sin\theta&-\cos\theta\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos^2\theta+\sin^2\theta&00&\sin^2\theta+\cos\theta^2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}=I_2$$

となります.
(2) (1) から Q は正則で

$$Q^{-1}=Q$$

であることが分かります.

V 以下の $\vec{a},\vec{b}$ に対して $\vec{b}$ の $\vec{a}$ 方向への直交射影 $\vec{w}$ を求めましょう.
(1) $\vec{a}=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix},\vec{b}=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$ **(2)** $\vec{a}=\begin{pmatrix}1\\1\\1\\-1\end{pmatrix},\vec{b}=\begin{pmatrix}1\\0\\-1\\1\end{pmatrix}$ **(3)** $\vec{a}=\begin{pmatrix}1\\1\\1\\-1\end{pmatrix},\vec{b}=\begin{pmatrix}1\\0\\2\\1\end{pmatrix}$

解答 (1)

$$\vec{w}=\frac{(\vec{a},\vec{b})}{||\vec{a}||^2}\vec{a}=\frac{2}{3}\vec{a}$$

(2)

$$\vec{w}=\frac{(\vec{a},\vec{b})}{||\vec{a}||^2}\vec{a}=-\frac{1}{2}\vec{a}$$

(3)

$$\vec{w}=\frac{(\vec{a},\vec{b})}{||\vec{a}||^2}\vec{a}=\frac{2}{2}\vec{a}=\vec{a}$$

VI

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix},\ \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

に対して $||\vec{a} - t\vec{b}||^2$ を最小にする t を求めましょう.

解答

$$\begin{aligned} ||\vec{a}||^2 &= 1 + 4 + 9 + 16 = 30 \\ (\vec{a}, \vec{b}) &= 1 + (-2) + 3 + 4 = 6 \\ ||\vec{b}||^2 &= 1 + 1 + 1 + 1 = 4 \end{aligned}$$

から

$$\begin{aligned} ||\vec{a} - t\vec{b}||^2 &= ||\vec{a}||^2 - 2t(\vec{a}, \vec{b}) + ||\vec{b}||^2 \\ &= 4t^2 - 12t + 30 = 4\left(t - \frac{3}{2}\right)^2 + 21 \end{aligned}$$

となります. 従って $t = \frac{3}{2}$ のとき最小値 21 を取ります.

VII $A, B \in M_n(\mathbf{K})$ とします.
(1) A が正則ならば A^{-1} も正則であることを示しましょう.
(2) A, B が正則ならば積 AB も正則であることを示しましょう.

解答 (1)

$$A^{-1}A = A^{-1} = I_n$$

から A は正則で $\left(A^{-1}\right)^{-1} = A$ であることが分かります.
(2)

$$AB \cdot (B^{-1}A) = A(B^{-1}B)A^{-1} = AI_nA^{-1} = AA^{-1} = I_n$$

$$(B^{-1}A^{-1}) \cdot AB = B^{-1}(A^{-1}A)B = B^{-1}I_nB = B^{-1}B = I_n$$

から AB は正則で $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ であることが分かります.

VIII $\vec{a} \in \mathbf{R}^n$ が $\vec{a} \neq \vec{0}$ を満たすとします. $c\vec{a} = \vec{0}$ ならば $c = 0$ となることを示しましょう.

解答 $\vec{a} \neq \vec{0}$ ですから $\vec{a} = {}^t(a_1\ \ldots\ a_i\ \vec{d}ots\ a_n)$ とすると, ある i に関して第 i 成分について $a_i \neq 0$ が成立します. このとき

$$c\vec{a} = {}^t(ca_1\ \ldots\ ca_i\ \ldots\ ca_n) = \vec{0}$$

となりますから $ca_i = 0$ となります. $a_i \neq 0$ ですから $c = 0$ であることが従います.

別解 $||c\vec{a}|| = |c| \cdot ||\vec{a}|| = 0$ において $||\vec{a}|| > 0$ が成立しますから，$c = 0$ となります.

IX $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in \mathbf{R}^n$ に対して

$$||\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}||^2 = ||\vec{a}||^2 + ||\vec{b}||^2 + ||\vec{c}||^2 + 2(\vec{a}, \vec{b}) + 2(\vec{b}, \vec{c}) + 2(\vec{a}, \vec{c})$$

が成立することを示しましょう.（「線型代数学」教科書 13 ページ、演習 1.17）

解答

$$\begin{aligned} ||\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}||^2 &= ||\vec{a} + \vec{b} + ||^2 + 2(\vec{a} + \vec{b}, \vec{c}) + ||\vec{c}||^2 \\ &= ||\vec{a}||^2 + 2(\vec{a}, \vec{b}) + ||\vec{b}||^2 + 2(\vec{a}, \vec{c}) + 2(\vec{b}, \vec{c}) + ||\vec{c}||^2 \\ &= ||\vec{a}||^2 + ||\vec{b}||^2 + ||\vec{c}||^2 + 2(\vec{a}, \vec{b}) + 2(\vec{b}, \vec{c}) + 2(\vec{a}, \vec{c}) \end{aligned}$$

X $\vec{a} \in \mathbf{R}^n$ がすべての $\vec{x} \in \mathbf{R}^n$ に対して垂直，すなわち

$$(\vec{a}, \vec{x}) = 0 \quad (\vec{x} \in \mathbf{R}^n)$$

が成立するとします．このとき $\vec{a} = \vec{0}$ となることを示しましょう.（「線型代数学」教科書 13 ページ、演習 1.19）

解答　$\vec{x} = \vec{a}$ とすると

$$||\vec{a}||^2 = (\vec{a}, \vec{a}) = 0$$

から $\vec{a} = \vec{0}$ が従います.

注意 $\vec{a} \in \mathbf{R}^n$ に対して

$$||\vec{a}|| = 0 \Leftrightarrow \vec{a} = \vec{0}$$

が成立します.

XI $\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3} \in \mathbf{R}^n$ が

$$(\vec{f_i}, \vec{f_j}) = \begin{cases} 1 & (i = j) \\ 0 & (i \neq j) \end{cases}$$

を満たすとします.

(1)

$$||x\vec{f_1} + y\vec{f_2}||^2 = x^2 + y^2$$

$$||x\vec{f_1} + y\vec{f_2} + z\vec{f_3}||^2 = x^2 + y^2 + z^2$$

を示しましょう.

(2)$\vec{g} \in \mathbf{R}^n$ に対して

$$||\vec{g} - x\vec{f_1} - y\vec{f_2}||^2 = ||\vec{g}||^2 + x^2 + y^2 - 2x(\vec{g}, \vec{f_1}) - 2y(\vec{g}, \vec{f_2})$$

が成立することを示しましょう.

解答 (1)

$$\begin{aligned}
||x\vec{f_1} + y\vec{f_2}||^2 &= ||x\vec{f_1}||^2 + 2(x\vec{f_1}, y\vec{f_2}) + ||y\vec{f_2}||^2 \\
&= x^2||\vec{f_1}||^2 + 2xy(\vec{f_1}, \vec{f_2}) + y^2||\vec{f_2}||^2 \\
&= x^2 \cdot 1 + 2xy \cdot 0 + y^2 \cdot 1 = x^2 + y^2 \\
||x\vec{f_1} + y\vec{f_2} + z\vec{f_3}||^2 &= ||x\vec{f_1} + y\vec{f_2}||^2 + 2(x\vec{f_1} + y\vec{f_2}, z\vec{f_3}) + ||z\vec{f_3}||^2 \\
&= x^2 + y^2 + 2xz(\vec{f_1}, \vec{f_3}) + 2yz(\vec{f_2}, \vec{f_3}) + z^2||\vec{f_3}||^2 \\
&= x^2 + y^2 + 2xz \cdot 0 + 2yz \cdot 0 + z^2 \cdot 1 = x^2 + y^2 + z^2
\end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned}
||\vec{g} - x\vec{f_1} - y\vec{f_2}||^2 &= ||\vec{g}||^2 - 2(x\vec{f_1} + y\vec{f_2}, \vec{g}) + ||x\vec{f_1} + y\vec{f_2}||^2 \\
&= ||\vec{g}||^2 - 2x(\vec{f_1} + y\vec{f_2}, \vec{g}) - 2y(\vec{f_2}, \vec{g}) + x^2 + y^2 \\
&= ||\vec{g}||^2 + x^2 + y^2 - 2x(\vec{g}, \vec{f_1}) - 2y(\vec{g}, \vec{f_2})
\end{aligned}$$

XII $\vec{a} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \neq \vec{0}$ とします。$\vec{w}$ を $\vec{v} \in \mathbf{R}^2$ の $\vec{a}$ 方向の直交射影とします。このとき

$$\vec{q} = \vec{v} + 2(\vec{w} - \vec{v}) = 2\vec{w} - \vec{v}$$

に対して

$$\vec{q} = Q\vec{v}$$

を満たす行列 Q を求めましょう。さらに

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix}$$

のとき Q を求めましょう。

解答

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

とすると

$$\vec{w} = \frac{(\vec{a}, \vec{v})}{||\vec{a}||^2} = \frac{\alpha x + \beta y}{\alpha^2 + \beta^2} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \frac{1}{\alpha^2 + \beta^2} \begin{pmatrix} \alpha^2 x + \alpha\beta y \\ \alpha\beta x + \beta^2 y \end{pmatrix} = \frac{1}{\alpha^2 + \beta^2} \begin{pmatrix} \alpha^2 & \alpha\beta \\ \alpha\beta & \beta^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

から

$$\vec{q} = 2\vec{w} - \vec{v} = \left(\frac{2}{\alpha^2 + \beta^2} \begin{pmatrix} \alpha^2 & \alpha\beta \\ \alpha\beta & \beta^2 \end{pmatrix} - I_2 \right) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{\alpha^2 + \beta^2} \begin{pmatrix} \alpha^2 - \beta^2 & 2\alpha\beta \\ 2\alpha\beta & -\alpha^2 + \beta^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

となりますから

$$Q = \frac{1}{\alpha^2 + \beta^2} \begin{pmatrix} \alpha^2 - \beta^2 & 2\alpha\beta \\ 2\alpha\beta & -\alpha^2 + \beta^2 \end{pmatrix}$$

となります．特に $\vec{a} = \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix}$ のとき

$$Q = \begin{pmatrix} \cos 2\theta & \sin 2\theta \\ \sin 2\theta & -\cos 2\theta \end{pmatrix}$$

となります．

I 生産要素 A, B の投入量 x, y に対して生産物が生産関数

$$z = f(x, y) = x^{\frac{1}{3}} y^{\frac{1}{3}} \quad (x, y > 0) \tag{1}$$

だけ生産されるとします．生産要素 A, B の単位当たりの価格が p, q, 生産物の価格が r とするとき，利潤関数

$$\pi(x, y) := rf(x, y) - px - qy \tag{2}$$

を最大化する (x, y) を求めましょう．

解答

$$\pi_x = rf_x - p = r\cdot\frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}y^{\frac{1}{3}} - p = 0 \quad \cdots(1)$$
$$\pi_y = rf_y - q = r\cdot\frac{1}{3}x^{\frac{1}{3}}y^{-\frac{2}{3}} - q = 0 \quad \cdots(2)$$

すなわち

$$\begin{cases} x^{-\frac{2}{3}}y^{\frac{1}{3}} &= \frac{3p}{r} & \cdots(1)' \\ x^{\frac{1}{3}}y^{-\frac{2}{3}} &= \frac{3q}{r} & \cdots(2)' \end{cases}$$

を解いて $\pi(x,y)$ の停留点を求めます. $(1)'^2\times(2)'$, $(1)'\times(2)'^2$, を考えると

$$\frac{1}{x} = \left(\frac{3p}{r}\right)^2\left(\frac{3q}{r}\right) = \frac{27p^2q}{r^3}$$
$$\frac{1}{y} = \left(\frac{3p}{r}\right)\left(\frac{3q}{r}\right)^2 = \frac{27pq^2}{r^3}$$

から

$$x = x_0 := \frac{r^3}{27p^2q}, \quad y = y_0 := \frac{r^3}{27pq^2}$$

が停留点であることが分かります.

(補足) さらに

$$\pi_{xx} = -\frac{2r}{9}x^{-\frac{5}{3}}y^{\frac{1}{3}}$$
$$\pi_{xy} = \frac{r}{9}x^{-\frac{2}{3}}y^{-\frac{2}{3}}$$
$$\pi_{xx} = -\frac{2r}{9}x^{\frac{1}{3}}y^{-\frac{5}{3}}$$

から

$$\pi_{xx} = -\frac{2r}{9}x^{-\frac{5}{3}}y^{\frac{1}{3}} < 0 \quad (x, y > 0)$$

$$\det(H(f)(x,y)) = \begin{vmatrix} -\frac{2r}{9}x^{-\frac{5}{3}}y^{\frac{1}{3}} & \frac{r}{9}x^{-\frac{2}{3}}y^{-\frac{2}{3}} \\ \frac{r}{9}x^{-\frac{2}{3}}y^{-\frac{2}{3}} & -\frac{2r}{9}x^{\frac{1}{3}}y^{-\frac{5}{3}} \end{vmatrix} = \frac{r^2}{27}x^{-\frac{4}{3}}y^{-\frac{4}{3}} > 0 \quad (x, y > 0)$$

であることが分かりますから

$$\pi(x,y) < \pi(x_0,y_0) \quad (x, y > 0, (x,y) \neq (x_0,y_0))$$

であることが分かります.