第 1 講義 05 月 05 日　演習問題解答

I 以下の函数の停留点を求めましょう．

(1)	$z = x^2 + xy + y^2 - 4x - 8y$	(2)	$z = x^3 + y^3 - 9xy + 27$
(3)	$z = x^2 + xy - y^2 - 4x - 2y$	(4)	$z = x^2 + 4xy + 2y^2 - 6x - 8y$
(5)	$z = x^3 - xy - y^2$	(6)	$z = e^{-x^2-y^2}(2x^2 + y^2)$
(7)	$z = (x^2 + y^2)^2 - 2(x^2 - y^2)$	(8)	$z = x^3 + y^3 + 6xy$

(1)

$$\begin{cases} z_x &= 2x + y - 4 &= 0 \\ z_y &= x + 2y - 8 &= 0 \end{cases}$$

をクラメールの公式を使って解くと

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 8 & 2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}} = \frac{0}{3} = 0, \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 8 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}} = \frac{12}{3} = 4$$

となりますから，$(x, y) = (0, 4)$ が z の停留点であることが分かります．

(2)

$$\begin{cases} z_x &= 3x^2 - 9y &= 0 \cdots (I) \\ z_y &= 3y^2 - 9x &= 0 \cdots (II) \end{cases}$$

を解きます．(I) から $y = \frac{1}{3}x^2$ となるので (II) から得られる $y^2 = 3x$ に代入して

$$\frac{1}{9}x^4 = 3x \quad \text{すなわち} \quad x^4 = 27x$$

を得ます．従って

$$x = 0 \quad \text{または} \quad x = 3$$

が必要です．

(a) $\underline{x = 0 \text{ のとき}}$, (I) から $y = 0$ となりますが、逆に $(x, y) = (0, 0)$ は (I) かつ (II) を満たします．

(b) $\underline{x = 3 \text{ のとき}}$, (I) から $y = 3$ となりますが、逆に $(x, y) = (3, 3)$ は (I) かつ (II) を満たします．

以上で z の停留点は $(x, y) = (0, 0), (3, 3)$ であることが分かりました．

(3)

$$\begin{cases} z_x &= 2x + y - 4 &= 0 \\ z_y &= x - 2y - 2 &= 0 \end{cases}$$

をクラメールの公式で解くと

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix}} = \frac{-10}{-5} = 2, \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix}} = \frac{0}{-5} = 0$$

となりますから，$(x, y) = (2, 0)$ が z の停留点であることが分かります．

(4)

$$\begin{cases} z_x &= 2x + 4y - 6 &= 0 \\ z_y &= 4x + 4y - 8 &= 0 \end{cases}$$

をクラメールの公式で解くと

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 6 & 4 \\ 8 & 4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 4 \end{vmatrix}} = \frac{-8}{-8} = 1, \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 6 \\ 4 & 8 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 4 \end{vmatrix}} = \frac{-8}{-8} = 1$$

から停留点は $(x, y) = (1, 1)$ となります．

(5)

$$\begin{cases} z_x &= 3x^2 - y &= 0 & (i) \\ z_y &= -x - 2y &= 0 & (ii) \end{cases}$$

を解きます。(ii) から $x = -2y$ となりますが，これを (i) に代入して

$$12y^2 - y = 0$$

を得ますが，これから $y = 0$ または $y = \frac{1}{12}$ であることが分かります．これを $x = -2y$ に代入して

$$\begin{array}{lll} y = 0 & \text{のとき} & x = 0 \\ y = \frac{1}{12} & \text{のとき} & x = -\frac{1}{6} \end{array}$$

となりますから，停留点は

$$(x, y) = (0, 0), \quad (-\frac{1}{6}, \frac{1}{12})$$

であることが分かります．

(6) まず関数

$$z = e^{-x^2-y^2}(2x^2 + y^2)$$

の停留点を求めましょう．まず z の偏導関数を計算すると

$$\begin{aligned} z_x &= e^{-x^2-y^2}(-2x)(2x^2+y^2)+e^{-x^2-y^2}(4x) \\ &= 2xe^{-x^2-y^2}(-2x^2-y^2+2) \\ z_y &= e^{-x^2-y^2}(-2y)(2x^2+y^2)+e^{-x^2-y^2}(2y) \\ &= 2ye^{-x^2-y^2}(-2x^2-y^2+1) \end{aligned}$$

となります．$e^{-x^2-y^2}>0$ ですから

$$\begin{aligned} & z_x = z_y = 0 \\ \Leftrightarrow\ & x(2x^2+y^2-2)=0 \\ & \qquad \text{and } y(2x^2+y^2-1)=0 \\ \Leftrightarrow\ & (x=0 \text{ or } 2x^2+y^2=2) \\ & \qquad \text{and } (y=0 \text{ or } 2x^2+y^2=1) \\ \Leftrightarrow\ & (x=y=0) \\ & \qquad \text{or } (x=0 \text{ and } 2x^2+y^2=1) \\ & \quad \text{or } (y=0 \text{ and } 2x^2+y^2=2) \\ & \quad \text{or } (2x^2+y^2=2 \text{ and } 2x^2+y^2=1) \\ \Leftrightarrow\ & (x=y=0) \text{ or } (x=0 \text{ and } y^2=1) \\ & \quad \text{or } (y=0 \text{ and } x^2=1) \\ & \quad \text{or } (2x^2+y^2=2 \text{ and } 2x^2+y^2=1) \\ \Leftrightarrow\ & (x,y)=(0,0),(0,\pm1),(\pm1,0) \end{aligned}$$

が成立します．従って z の停留点は $(x,y)=(0,0),(0,\pm1),(\pm1,0)$ です.

(7) $f(x,y)$ の偏導関数は

$$\begin{aligned} f_x &= 2(x^2+y^2)\cdot 2x-4x = 4x(x^2+y^2-1) \\ f_y &= 2(x^2+y^2)\cdot 2y-4x = 4y(x^2+y^2+1) \end{aligned}$$

と計算されます。このことから

$$\begin{aligned} f_x = 0 &\Leftrightarrow (x=0) \text{ OR } (x^2+y^2=1) \\ f_y = 0 &\Leftrightarrow y=0 \end{aligned}$$

が従いますので

$$\begin{aligned} f_x=f_y=0 \Leftrightarrow\ & (x=y=0) \\ & \text{OR } (x^2+y^2=1, \text{AND } y=0) \\ \Leftrightarrow\ & (x,y)=(0,0),\ (\pm1,0) \end{aligned}$$

が分かります。以上で f の停留点は $(0,0)$, $(1,0)$, $(-1,0)$ の 3 点であることが示されました。

(8)（コアテキストの 282 ページの例 8.18）

z の偏導関数は

$$\begin{cases} z_x = 3x^2+6y = 0\cdots(1) \\ z_y = 3y^2+6x = 0\cdots(2) \end{cases}$$

と計算されます．(2) から $x=-\frac{1}{2}y^2$ を得ますが, これを (1) から得られる $y=-\frac{1}{2}x^2$ に代入すると

$$y = -\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}y^2\right)^2 = -\frac{1}{8}y^4$$

が導かれます．従って

$$y(y^3+8)=0$$

から $y=0$ または $y=-2$ であることが必要条件であることが分かります．このとき

(i) $y=0$ のとき (2) に代入して $x=0$
(ii) $y=-2$ のとき (2) から $x=-2$ を得る.

を得ます．以上で停留点は

$$(x,y)=(0,0)\text{または}(-2,-2)$$

であることが示されました.

II 次の行列の積を計算しましょう．

(1) $\begin{pmatrix}\cos\alpha & -\sin\alpha\\ \sin\alpha & \cos\alpha\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos\beta & -\sin\beta\\ \sin\beta & \cos\beta\end{pmatrix}$ **(2)** $\begin{pmatrix}\cos\alpha & \sin\alpha\\ \sin\alpha & -\cos\alpha\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos\alpha & \sin\alpha\\ \sin\alpha & -\cos\alpha\end{pmatrix}$

(3) $\begin{pmatrix}1 & \lambda\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}$ **(4)** $\begin{pmatrix}1 & 0\\ \lambda & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}$ **(5)** $\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}$

(6) $\begin{pmatrix}\lambda & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}$ **(7)** $\begin{pmatrix}1 & \lambda\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & \mu\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ **(8)** $\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$

(9) $\begin{pmatrix}a_1 & b_1\\ a_2 & b_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & \lambda\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ **(10)** $\begin{pmatrix}a_1 & b_1\\ a_2 & b_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\lambda & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ **(11)** $\begin{pmatrix}a_1 & b_1\\ a_2 & b_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$

解答

(1)

$$\begin{aligned}&\begin{pmatrix}\cos\alpha & -\sin\alpha\\ \sin\alpha & \cos\alpha\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos\beta & -\sin\beta\\ \sin\beta & \cos\beta\end{pmatrix}\\ &=\begin{pmatrix}\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta & -\cos\alpha\sin\beta-\sin\alpha\cos\beta\\ \cos\alpha\sin\beta+\sin\alpha\cos\beta & \cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos(\alpha+\beta) & -\sin(\alpha+\beta)\\ \sin(\alpha+\beta) & \cos(\alpha+\beta)\end{pmatrix}\end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned}&\begin{pmatrix}\cos\alpha & \sin\alpha\\ \sin\alpha & -\cos\alpha\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos\alpha & \sin\alpha\\ \sin\alpha & -\cos\alpha\end{pmatrix}\\ &=\begin{pmatrix}\cos\alpha\cos\alpha+\sin\alpha\sin\alpha & 0\\ 0 & \cos\alpha\cos\alpha+\sin\alpha\sin\alpha\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=I_2\end{aligned}$$

(3)

$$\begin{pmatrix}1 & \lambda\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x+\lambda y\\ y\end{pmatrix}$$

(4)

$$\begin{pmatrix}1 & 0\\ \lambda & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x\\ x+\lambda y\end{pmatrix}$$

(5)

$$\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}y\\ x\end{pmatrix}$$

(6)

$$\begin{pmatrix}\lambda & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\lambda x\\ y\end{pmatrix}$$

(7)

$$\begin{pmatrix}1 & \lambda\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & \mu\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & \lambda+\mu\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

(8)

$$\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

(9)

$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & \lambda \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 & \lambda a_1 + b_1 \\ a_2 & \lambda a_2 + b_2 \end{pmatrix} \quad i.e. \quad (\vec{a}\ \vec{b})\begin{pmatrix} 1 & \lambda \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = (\vec{a}\ \lambda\vec{a}+\vec{b})$$

(10)

$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda a_1 & b_1 \\ \lambda a_2 & b_2 \end{pmatrix} \quad i.e. \quad (\vec{a}\ \vec{b})\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = (\lambda\vec{a}\ \vec{b})$$

(11)

$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 & a_1 \\ b_2 & a_2 \end{pmatrix} \quad i.e. \quad (\vec{a}\ \vec{b})\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = (\vec{b}\ \vec{a})$$

III $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in \mathbf{R}^n$ とします．以下を計算しましょう。

(1) $(\vec{a}\ \vec{b})\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, **(2)** $(\vec{a}\ \vec{b})\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, **(3)** $(\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c})\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, **(4)** $(\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c})\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, **(5)** $(\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c})\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$,

(6) $(\vec{a}\ \vec{b})\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, **(7)** $(\vec{a}\ \vec{b})\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, **(8)** $(\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c})\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$,

(9) $(\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c})\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, **(10)** $(\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c})\begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$,

(11) $(\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c})\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, **(12)** $(\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c})\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$,

解答

(1)

$$(\vec{a}\ \vec{b})\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 1\cdot\vec{a} + 0\cdot\vec{b} = \vec{a}$$

(2)

$$(\vec{a}\ \vec{b})\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 0\cdot\vec{a} + 1\cdot\vec{b} = \vec{b}$$

(3)

$$(\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c})\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 1\cdot\vec{a} + 0\cdot\vec{b} + 0\cdot\vec{c} = \vec{a}$$

(4)

$$(\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c})\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 0\cdot\vec{a} + 1\cdot\vec{b} + 0\cdot\vec{c} = \vec{b}$$

(5)

$$(\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c})\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 0\cdot\vec{a} + 0\cdot\vec{b} + 1\cdot\vec{c} = \vec{c}$$

(6)

$$(\vec{a}\,\vec{b})\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\cdot\vec{a} + 0\cdot\vec{b} & 0\cdot\vec{a} + 1\cdot\vec{b} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{a} & \vec{b} \end{pmatrix}$$

(7)

$$(\vec{a}\,\vec{b})\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0\cdot\vec{a} + 1\cdot\vec{b} & 1\cdot\vec{a} + 0\cdot\vec{b} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{b} & \vec{a} \end{pmatrix}$$