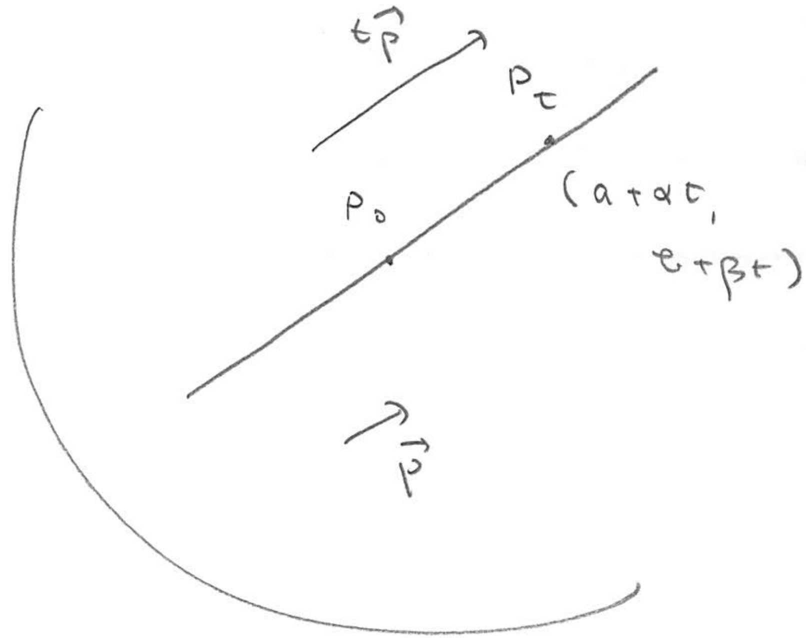
凸関数（2変数）

復習　$\mathbb{R}^2$ の開集合 U 上の C^2級 関数 $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$

$P_0(a, b) \in U$,　$\vec{p} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \neq \vec{0}$ とする

$$F(t) = f(a + \alpha t, b + \beta t)$$

とおくと



$$F'(t) = (\nabla(f)(P_t), \vec{p})$$

$$F''(t) = (H(f)(P_t)\vec{p}, \vec{p})$$

$U (\subset \mathbb{R}^2)$は開で凸とする.

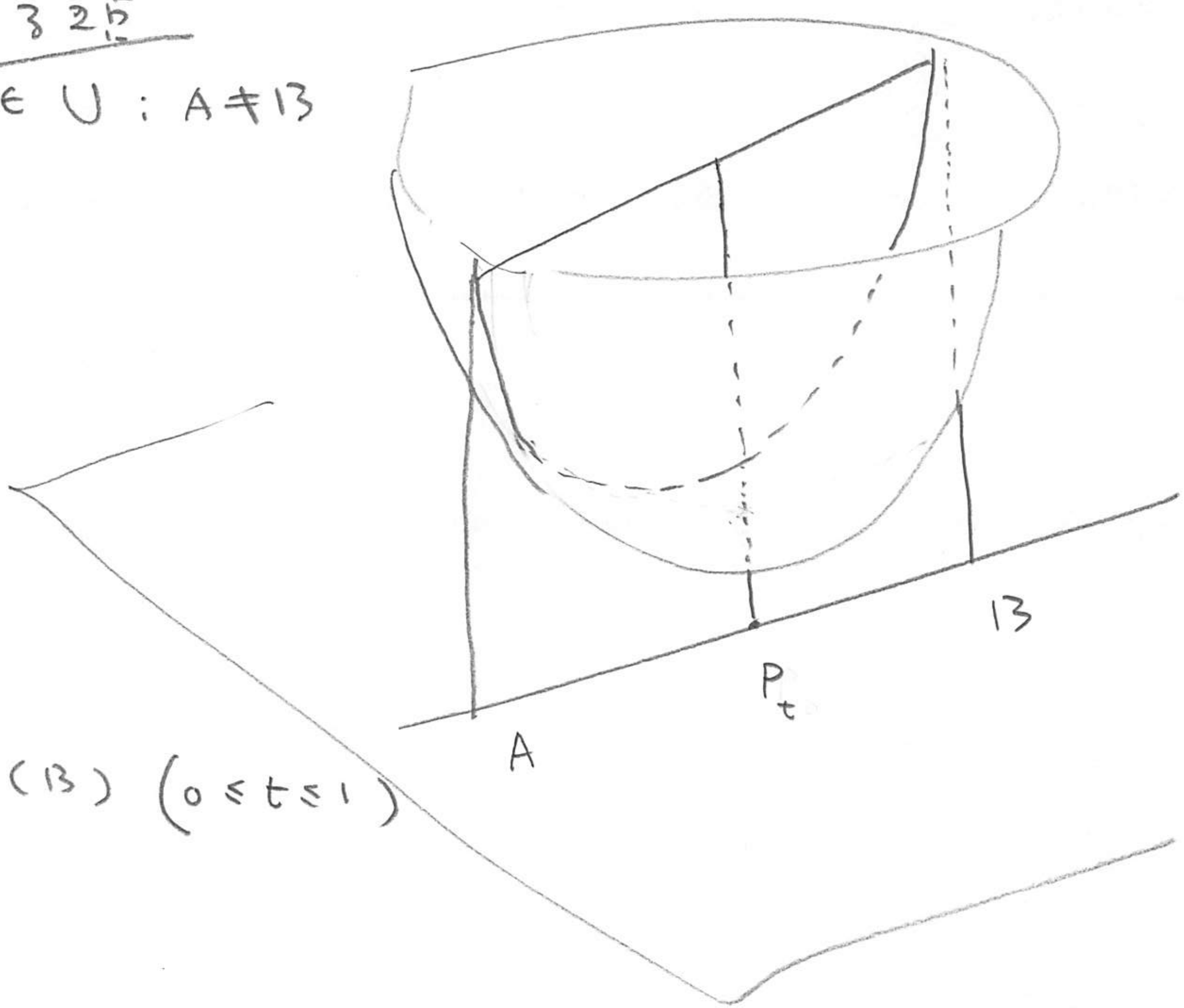
定義(1) fが凸とは $A, B \in U : A \neq B$ (相異なる2点)

に対して $\overrightarrow{AB} = \vec{p}$ とするとき

$$\overrightarrow{AP_t} = t\vec{p}$$

で定まる P_t を用いて

$$f(P_t) \leq (1-t)f(A) + t f(B) \quad (0 \leq t \leq 1)$$



注) $F(t) = f(P_t)$ とすると

$$F(t) \leq (1-t)F(0) + tF(1)$$

が従うので Fは凸関数.

(2) f が狭義凸とは

$$f(P_t) < (1-t)f(A) + t f(B) \quad (0 < t < 1)$$

(注) (1)と同様に $F(t) = f(P_t)$ とすると F は狭義の凸

補足　A: 2×2 で対称とする. $A = \begin{pmatrix} a & c \\ c & e \end{pmatrix}$

$$(A\vec{v}, \vec{v}) \geqq 0 \quad (\vec{v} \in \mathbb{R}^2) \iff a, e \geqq 0, \ |A| \geqq 0$$

$\iff$ Aの固有値 $\alpha, \beta \geqq 0$

<u>定理</u>　Uは$\mathbb{R}^2$の開凸集合とし，$f : U \to \mathbb{R}$ はC^2級とします

(1)　fはU上凸 $\iff$ $f_{xx}(P),\ f_{yy}(P) \geq 0,$

$$\det\big(H(f)(P)\big) \geq 0 \quad (\forall P \in U)$$

(2)　$f_{xx}(P) > 0,\ \det H(f)(P) > 0 \quad (P \in U)$

$\Longrightarrow$ fはUに狭義凸

定理 U 開凸集合 $(\subset \mathbb{R}^2)$ $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$

fが凸ならば

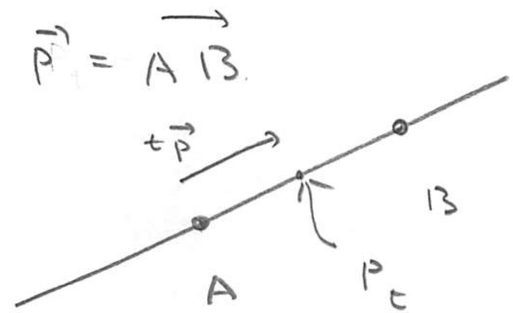
$$U_a := \{ P \in U ; f(P) \leq a \}$$

$$V_a := \{ P \in U ; f(P) < a \}$$

は凸集合.

$A, B \in U_a$ とすると $f(A), f(B) \leq a$ となる. $\vec{p} = \overrightarrow{AB}$

$$\overrightarrow{AP_t} = t\vec{p}$$



として P_t を定めると $0 \leq t \leq 1$ のとき

$$f(P_t) \leq (1-t)f(A) + t f(B)$$

$$\leq (1-t)a + ta = a$$

から $P_t \in U_a$. 従って $\overline{AB} \subset U_a$