ポートフォリオ理論（補足）

定理　$f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$　C^2 級

$$g_1 : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}, \quad \vec{x} \longmapsto (\vec{a}, \vec{x}) - \alpha$$

$$g_2 : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}, \quad \vec{x} \longmapsto (\vec{e}, \vec{x}) - \beta$$

は

(1) $(H(f)(P)\vec{v}, \vec{v}) > 0$ 　$(P \in \mathbb{R}^n, \vec{v} \neq \vec{0})$

(2) $\vec{a} \not\parallel \vec{e}$

を満たす。$P_0 \in \mathbb{R}^n$ が

- $\exists \lambda\ \exists \mu$　$\nabla(f)(P_0) + \lambda \nabla(g_1)(P_0) + \mu \nabla(g_2)(P_0) = \vec{0}$
- $g_1(P_0) = g_2(P_0) = 0$

を満たす。

$g_1(x) = g_2(x) = 0$ の下で f

$\vec{a} = \vec{1}$

$\vec{e} = \vec{\mu}$

$\boxed{\vec{1} \not\parallel \vec{e}}$

$$f(\vec{x}) = \frac{1}{2}(V\vec{x}, \vec{x})$$

$\to$ $\boxed{H(f) = V}$

V は 対称. $\boxed{\text{正定値}}$

$(V\vec{x}, \vec{x}) > 0 \ (\vec{x} \neq \vec{0})$

制約条件

(1) $(\vec{1}, \vec{x}) - 1 = 0$

(2) $(\vec{\mu}, \vec{x}) - \mu = 0$

$\vec{\mu} = \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \vdots \\ \mu_n \end{pmatrix}$ $\boxed{\vec{1} \nparallel \vec{\mu}}$

の下で

$f(\vec{x})$ を 最小化.

$r_1, \cdots, r_n$ 変量.

$A_1, \cdots, A_n$ の 収益率

分散共分散行列 V.

Lagrange の未定乗数法より $\vec{x}$ で停留点

$r_1 \quad \cdots \quad r_n$

期間

$\Rightarrow (\nabla(f), \vec{x}) + \lambda_1 \vec{1} + \lambda_2 \vec{\mu} = \vec{0}$

を満たす λ_1, λ_2 が存在する.

$\boxed{\vec{x} \text{ を求めたい}}$

このとき 制約条件 $g_1(P) = g_2(P) = 0$ を満たす P_0と異なるP

に対して

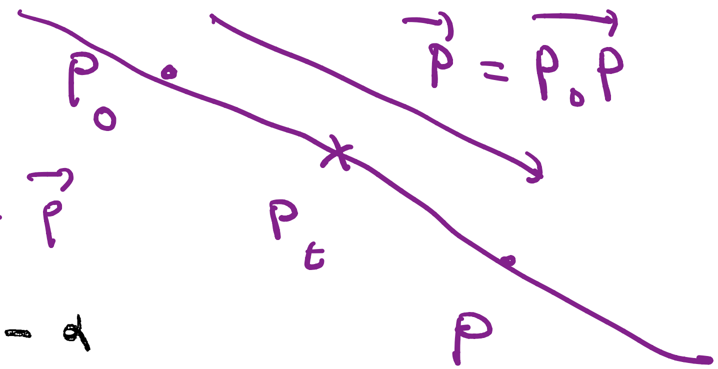
$$f(P) > f(P_0)$$

$P_0 \neq P$.

が成立する

最小値

(証明) 以下 P を $\vec{x}$, P_0 を $\vec{x}_0$ で表す.



$$\vec{x}_t = (1-t)\vec{x}_0 + \vec{x} \qquad (t \in \mathbb{R})$$

とすると

$$= \vec{x}_0 + t(\vec{x} - \vec{x}_0) \qquad = \vec{p}$$

$t=0$

$$g_1(\vec{x}_t) = (\vec{a}, (1-t)\vec{x}_0 + t\vec{x}) - \alpha$$

$$= (1-t)(\vec{a}, \vec{x}_0) + t(\vec{a}, \vec{x}) - \alpha$$

$$= (1-t)\cdot\alpha + t\cdot\alpha - \alpha = 0$$

$$g_2(\vec{x}_t) = \cdots = 0$$

から $\vec{x}_t$ の表す点 P_t は制約条件

$$g_1(P_t) = g_2(P_t) = 0$$

を満たす.

$\boxed{\text{P つ2にする 制約条件}}$

$F(t) := f(\vec{x}_t)$, $\vec{p} = \vec{x} - \vec{x}_0$

とすると

$$F'(t) = (\nabla(f)(P_t), \vec{p})$$

$\nabla(f)(P_0) + \lambda\vec{a} + \mu\vec{e} = \vec{0}$

特に

$$F'(0) = (\nabla(f)(P_0), \vec{p})$$

$$= (-\lambda\vec{a} - \mu\vec{e}, \vec{p}) = -\lambda(\vec{a}, \vec{p}) - \mu(\vec{e}, \vec{p}) = 0$$

$(\vec{a}, \vec{p}) = 0$, $(\vec{e}, \vec{p}) = 0$

さらに

$$F''(t) = (H(f)(P_t)\vec{p}, \vec{p}) > 0$$

が $\vec{p} = \vec{x} - \vec{x}_0 \neq \vec{0}$ から従う。よって $t \neq 0$ のとき

$$F(t) > F(0)$$

特に $t = 1$ のとき

$F(1) > F(0)$ すなわち $\boxed{f(P) > f(P_0)}$

$(\vec{a}, \vec{x}_0) - \alpha = 0$

$(\vec{a}, \vec{x}) - \alpha = 0$

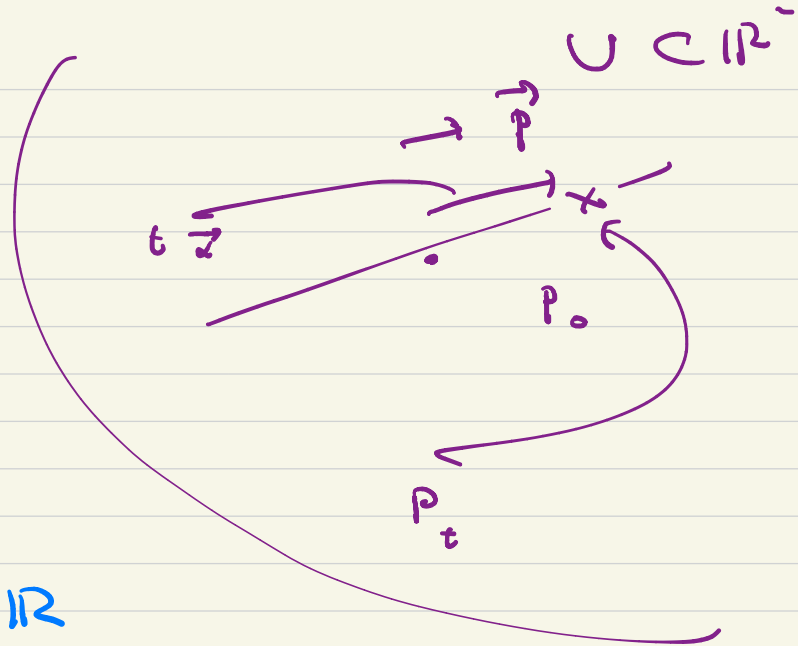
$\rightarrow$ $(\vec{a}, \vec{x}) - (\vec{a}, \vec{x}_0) = 0$

$= (\vec{a}, \vec{x} - \vec{x}_0) = (\vec{a}, \vec{p})$

$F(t) = f(P_t)$

$F'(t) = (\nabla(f)(P_t), \vec{p})$

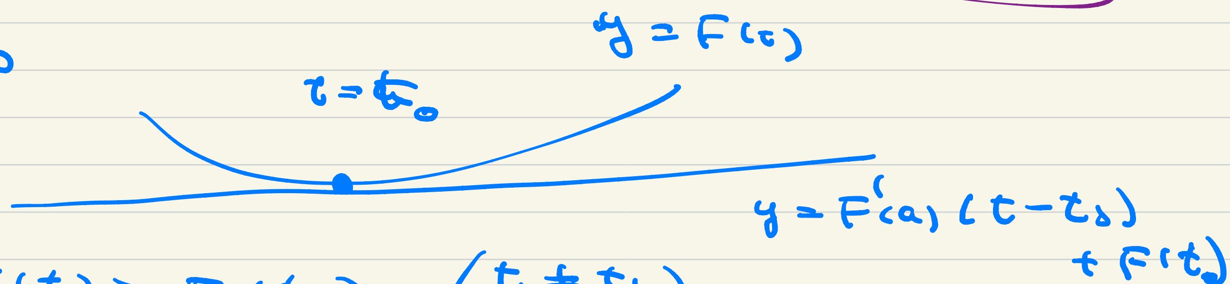
$F''(t) = (H(f)(P_t)\vec{p}, \vec{p})$



定理

$F: (a, b) \longrightarrow \mathbb{R}$

$F''(t) > 0$



$\Longrightarrow \quad F(t) > F(t_0) \quad (t \neq t_0)$