陰関数

Nobuyuki TOSE

V001 July 15, 2020

単位円 (1)

単位円

$$x^2 + y^2 = 1 \tag{1}$$

とその上の点 $(x, y) = (a, b)$ について考えます．$b > 0$ のとき曲線は (a, b) の近くで

$$y = \varphi(x) := \sqrt{1 - x^2}$$

と表せます．これを代入すると (1) に代入すると

$$x^2 + \varphi(x)^2 = 1 \tag{2}$$

が区間 $-1 < x < 1$ で常に成立します．

単位円 (2)

(2) の両辺を x で微分すると

$$2x + 2 \cdot \varphi(x) \cdot \varphi'(x) = 0 \tag{3}$$

が常に成立します．$-1 < x < 1$ において $\varphi(x) > 0$ ですから

$$\varphi'(x) = -\frac{x}{\varphi(x)}$$

であることが分かります．$x = \frac{1}{2}$ のとき $\varphi(\frac{1}{2}) = \sqrt{1 - \frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ から

$$\varphi(\frac{1}{2}) = -\frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = -\frac{1}{\sqrt{3}}$$

と計算されます．

単位円 (3)

(3) をもう一度 x で微分すると

$$2 + 2\varphi'(x)^2 + 2\varphi(x)\varphi''(x) \equiv 0$$

から

$$\varphi''(x) = -\frac{1 + \varphi'(x)^2}{\varphi(x)} = -\frac{\varphi(x)^2 + x^2}{\varphi(x)^3} = -\frac{1}{\varphi(x)^3}$$

と計算されます.

楕円 (1)

$$x^2 + xy + y^2 - 1 = 0$$

の上の点 (a, b) を考えます（例えば $(1, 0)$ です）．y の方程式とみると

$$D = x^2 - 4 \cdot (x^2 - 1) = -3x^2 + 4 > 0 \quad \textit{i.e.} \quad -\frac{2}{\sqrt{3}} < x < \frac{2}{\sqrt{3}}$$

のとき

$$y = \varphi(x) = -\frac{x}{2} \pm \sqrt{1 - \frac{3}{4}x^2}$$

と解けます．例えば $(x, y) = (1, 0)$ の近くでは $+$ の根が対応します．

楕円 (2)

もう一度代入すると

$$x^2 + x\varphi(x) + \varphi(x)^2 - 1 \equiv 0$$

が成立します．この両辺を x で微分すると

$$2x + 1 \cdot \varphi(x) + x \cdot \varphi'(x) + 2\varphi(x) \cdot \varphi'(x) \equiv 0 \tag{4}$$

すなわち

$$2x + \varphi(x) + (x + 2\varphi(x)) \cdot \varphi'(x) \equiv 0$$

から

$$\varphi'(x) = -\frac{2x + \varphi(x)}{x + 2\varphi(x)}$$

であることが分かる．
問 (4) の両辺を x で微分して $\varphi''(x)$ を x, $\varphi(x)$ で表しましょう．