

後分母展開 L10. Part 01.

Taylor 展開

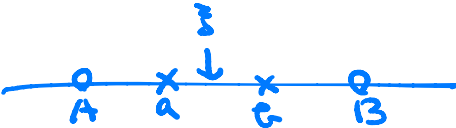
Nobuyuki TOSE

V01 July 08, 2020

n 階の Taylor の定理—復習

Theorem

n 階微分可能な $f : (A, B) \rightarrow \mathbb{R}$ があるとします. $a \neq b$ を満たす $a, b \in (A, B)$ に対して a と b の間に ξ が存在して


$$f(b) = f(a) + f'(a)(b-a) + \frac{f''(a)}{2!}(b-a)^2 + \frac{f^{(3)}(a)}{3!}(b-a)^3 + \dots + \frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}(b-a)^{n-1} + \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}(b-a)^n$$

Handwritten annotations: An arrow points to $f(b)$. A circle around ξ has an arrow pointing to the $f^{(n)}$ term. A circle around the $3!$ term has the character '注' (Note) written inside it.

が成立します.

e^t の Taylor 展開 (1)

Example $f(t) = e^t$ に対して

$$f'(t) = e^t, f''(t) = e^t, f^{(3)}(t) = e^t, \dots, f^{(n)}(t) = e^t$$

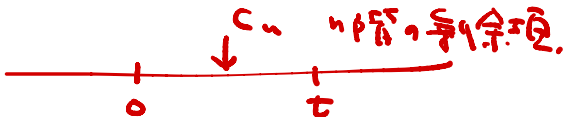
から

$$f(0) = f'(0) = \dots = f^{(n-1)}(0) = 1$$

が成立します。Taylor の定理を用いると、 $t \neq 0$ のとき 0 と t の間に c_n が存在して

$$e^t = 1 + t + \frac{1}{2}t^2 + \dots + \frac{1}{(n-1)!}t^{n-1} + \frac{1}{n!}e^{c_n}t^n$$

が成立します。



e^t の Taylor 展開 (2)

ここで $n \rightarrow +\infty$ とします. そのために任意の $R > 0$ を選び

$$-R < t < R$$

d であるとします. このとき

$$\left| e^t - \left(1 + t + \frac{1}{2!}t^2 + \dots + \frac{1}{(n-1)!}t^{n-1} \right) \right| = \frac{1}{n!} e^{c_n} |t|^n \leq \frac{1}{n!} e^R R^n$$

において

$$\rightarrow \frac{1}{n!} R^n \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow +\infty)$$

が成立しますから

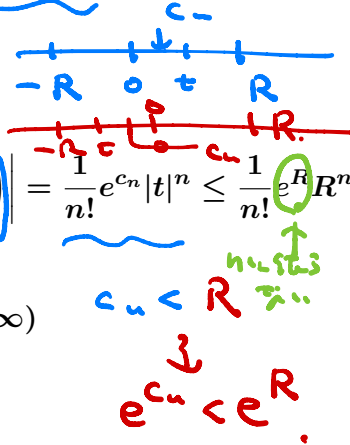
e^t の $t=0$ における Taylor 展開 (尾)

$$e^t = 1 + t + \frac{1}{2!}t^2 + \frac{1}{3!}t^3 + \dots$$

202-9 = 尾

が従います.

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} t^k$$



$$0! = 1$$

e^t の Taylor 展開 (3)

$$\frac{1}{n!} R^n \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow +\infty)$$

n 因子

条件 $R < N$ を満たす自然数 N を一つ選びます。

$$0 < \frac{R^n}{n!} < \frac{R}{1} \cdot \frac{R}{2} \cdots \frac{R}{N} \cdot \frac{R}{N} \cdots \frac{R}{N}$$

$$= \frac{R^N}{N!} \cdot \left(\frac{R}{N}\right)^{n-N}$$

と評価できます。 $0 < \frac{R}{N} < 1$ から

$$\left(\frac{R}{N}\right)^n \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow +\infty)$$

が成立しますから、はさみうちの定理を用いると

$$\frac{1}{n!} R^n \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow +\infty)$$

h 因子

$h > N$

h 因子

h-N 因子

$$= \frac{R}{1} \cdot \frac{R}{2} \cdots \frac{R}{N}$$

$$= \frac{R}{1} \cdot \frac{R}{2} \cdots \frac{R}{N-1}$$

$$\frac{R}{2} \cdots \frac{R}{N-1}$$

(S)

Poisson 分布 (1)

$$X = 0, 1, 2, \dots$$

非負整数に値をとる確率変数 X を以下のように定義します。

$$0 < P(X = k) = e^{-\mu} \frac{\mu^k}{k!} \quad (k = 0, 1, 2, \dots)$$

実際

$$\sum_{k=0}^{+\infty} P(X = k) = \sum_{k=0}^{+\infty} e^{-\mu} \frac{\mu^k}{k!} = e^{-\mu} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\mu^k}{k!} = e^{-\mu} \cdot e^{\mu} = 1$$

から全確率が 1 となるので、確率変数が定義できます。

Poisson 分布 (2)

期待値は

$$\begin{aligned}
 E[X] &= \sum_{k=0}^{+\infty} k \cdot P(X = k) = \sum_{k=1}^{+\infty} k \cdot P(X = k) \\
 &= \sum_{k=1}^{+\infty} k \cdot \frac{e^{-\mu} \mu^k}{k!} = e^{-\mu} \sum_{k=1}^{+\infty} k \cdot \frac{\mu^k}{k!} \\
 &= e^{-\mu} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\mu^k}{(k-1)!} \\
 &= e^{-\mu} \sum_{l=0}^{+\infty} \frac{\mu^{l+1}}{l!} = e^{-\mu} \mu \sum_{l=0}^{+\infty} \frac{\mu^l}{l!} = e^{-\mu} \mu \cdot e^{\mu} = \mu
 \end{aligned}$$

Handwritten notes:

- Red circles around k in the first term, $k=1$ in the second term, k in the third term, and $l+1$ in the fourth term.
- Red box around $P(X = k)$ in the first line.
- Red box around $\frac{e^{-\mu} \mu^k}{k!}$ in the second line.
- Red arrow pointing from the boxed $P(X = k)$ to the boxed fraction.
- Red annotations: $k = l + 1$, $k = l - 1$, and vertical ellipses with dots.
- Red arrow pointing to the right in the fourth line.
- Red underline under $\sum_{l=0}^{+\infty} \frac{\mu^l}{l!}$ in the fourth line.
- Red bracket under the sum in the fourth line, with e^{μ} written below it.

Poisson 分布 (3)

2 次のモーメントは

$$\begin{aligned}
 E[X^2] &= \sum_{k=0}^{+\infty} k^2 \cdot P(X = k) \\
 &= \sum_{k=0}^{+\infty} k(k-1) \cdot P(X = k) + \sum_{k=0}^{+\infty} k \cdot P(X = k) \\
 &= \sum_{k=2}^{+\infty} k(k-1) e^{-\mu} \frac{\mu^k}{k!} + \mu = \sum_{k=2}^{+\infty} e^{-\mu} \frac{\mu^k}{(k-2)!} + \mu \\
 &= \sum_{\ell=0}^{+\infty} e^{-\mu} \frac{\mu^{\ell+2}}{\ell!} + \mu = e^{-\mu} \mu^2 \sum_{\ell=0}^{+\infty} \frac{\mu^\ell}{\ell!} + \mu \\
 &= e^{-\mu} \mu^2 \cdot e^\mu + \mu = \mu^2 + \mu
 \end{aligned}$$

$k^2 = k^2 - k + k$
 $= k(k-1) + k$

$k! = k \cdot (k-1) \cdot (k-2) \dots 1$
 $\frac{\mu^k}{k!} = \frac{\mu^k}{k \cdot (k-1) \cdot (k-2) \dots 1}$
 $\frac{\mu^k}{(k-2)!} = \frac{\mu^k}{(k-2) \cdot (k-3) \dots 1}$

$\sum_{\ell=0}^{+\infty} \frac{\mu^\ell}{\ell!} = e^\mu$

$k = \ell + 2$
 $\ell = k - 2$

$$V[X] = E[X^2] - (E[X])^2$$

$$= \mu^2 + \mu - \mu^2$$

$$= \mu$$

Poisson 分布 (4)

分散は

$$V[X] = E[X^2] - (E[X])^2 = \mu^2 + \mu - \mu^2 = \mu$$

$$(\sin t)' = \cos t$$

$$(\cos t)' = -\sin t$$

$\sin t, \cos t$ の Taylor 展開 (1)

$f(t) = \sin t$ に対して

$$f'(t) = \cos t, \quad f''(t) = -\sin t, \quad f^{(3)}(t) = -\cos t, \quad f^{(4)}(t) = \sin t$$

と導関数を求めていくと周期が 4 であることが分かります。これから

$$f^{(k)}(t) = \begin{cases} \cos t & k = 1, 5, \dots \\ -\sin t & k = 2, 6, \dots \\ -\cos t & k = 3, 7, \dots \\ \sin t & k = 0, 4, 8, \dots \end{cases}$$

となり

$$|f^{(k)}(t)| \leq 1$$

$$f^{(k)}(0) = \begin{cases} 1 & k = 1, 5, \dots & \leftarrow \\ 0 & k = 2, 6, \dots & \leftarrow \\ -1 & k = 3, 7, \dots & \leftarrow \\ 0 & k = 0, 4, 8, \dots & \leftarrow \end{cases}$$

が分かります。

sin t, cos t の Taylor 展開 (2)

Taylor の定理を用いると $t \neq 0$ のとき

$$\sin t = t - \frac{1}{3!}t^3 + \frac{1}{5!}t^5 - \frac{1}{7!}t^7 + \dots + \frac{f^{(n-1)}(0)}{(n-1)!}t^{n-1} + \frac{f^{(n)}(c_n)}{n!}t^n$$

を満たす c_n が 0 と t の間に存在します。

$$\left| \sin t - \left(\sin t = t - \frac{1}{3!}t^3 + \frac{1}{5!}t^5 - \frac{1}{7!}t^7 + \dots + \frac{f^{(n-1)}(0)}{(n-1)!}t^{n-1} \right) \right|$$

$$= \left| \frac{f^{(n)}(c_n)}{n!}t^n \right| \leq \frac{|t|^n}{n!}$$

$|f^{(n)}(c_n)| \leq 1$

において $\frac{|t|^n}{n!} \rightarrow 0$ ($n \rightarrow +\infty$) から

$\sin t, \cos t$ の Taylor 展開 (3)

$$\sin t = t - \frac{1}{3!}t^3 + \frac{1}{5!}t^5 - \frac{1}{7!}t^7 + \dots$$

が従います。同様に

$$\cos t = 1 - \frac{1}{2!}t^2 + \frac{1}{4!}t^4 - \frac{1}{6!}t^6 + \dots$$



偶次項が正、奇次項が負