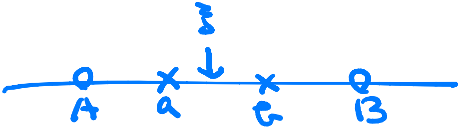
微分積分入門 L10. Part 01.

Taylor 展開

Nobuyuki TOSE

V01 July 08, 2020

n 階の Taylor の定理—復習



Theorem

n 階微分可能な $f:(A,B)\to\mathbb{R}$ があるとします．$a\neq b$ を満たす $a,b\in(A,B)$ に対して a と b の間に ξ が存在して

$$f(b)=f(a)+f'(a)(b-a)+\frac{f''(a)}{2!}(b-a)^2+\frac{f^{(3)}(a)}{3!}(b-a)^3+\cdots+\frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}(b-a)^{n-1}+\frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}(b-a)^n$$

注

が成立します．

e^t の Taylor 展開 (1)

Example $f(t) = e^t$ に対して

$$f'(t) = e^t,\ f''(t) = e^t,\ f^{(3)}(t) = e^t, \ldots, f^{(n)}(t) = e^t$$

から

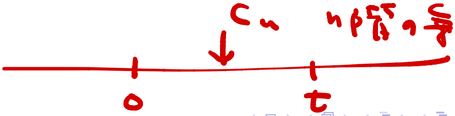
$$f(0) = f'(0) = \cdots = f^{(n-1)}(0) = 1$$

が成立します．Taylor の定理を用いると，$t \neq 0$ のとき 0 と t の間に c_n が存在して

$$e^t = \boxed{1 + t + \frac{1}{2}t^2 + \cdots + \frac{1}{(n-1)!}t^{n-1}} + \boxed{\frac{1}{n!}e^{c_n}t^n}$$

が成立します．

n 階の剰余項．



ここで $n \to +\infty$ とします．そのために任意の $R > 0$ を選び

c_n

$$-R < t < R$$

$-R \quad 0 \quad t \quad R$

d であるとします．このとき

$$\boxed{\left| e^t - \left(1 + t + \frac{1}{2!}t^2 + \cdots + \frac{1}{(n-1)!}t^{n-1}\right) \right|} = \frac{1}{n!}e^{c_n}|t|^n \le \frac{1}{n!}e^R R^n$$

において

$$\boxed{\frac{1}{n!}R^n \to 0} \quad (n \to +\infty)$$

$c_n < R$

$e^{c_n} < e^R$

が成立しますから

e^t の $t=0$ における Taylor 展開

マクローリン展開

$$e^t = 1 + t + \frac{1}{2!}t^2 + \frac{1}{3!}t^3 + \cdots$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} t^k$$

$0! = 1$

が従います．

$$\frac{1}{n!}R^n \to 0 \quad (n \to +\infty)$$

条件 $R < N$ を満たす自然数 N を一つ選びます．

$R > 0$

N 因子　　n 因子　　$n > N$

$$0 < \frac{R^n}{n!} < \underbrace{\frac{R}{1}\cdot\frac{R}{2}\cdots\frac{R}{N}}_{} \cdot \underbrace{\frac{R}{N}\cdots\frac{R}{N}}_{n-N \text{ 因子}} = \frac{R^N}{N!}\cdot\left(\frac{R}{N}\right)^{n-N}$$

n 因子．

n に依らない

$$= \frac{R}{1}\cdot\frac{R}{2}\cdots\frac{R}{n} = \frac{R}{1}\cdot\frac{R}{2}\cdots\frac{R}{N-1}\cdot\frac{R}{N}\cdots\frac{R}{n}$$

と評価できます．$0 < \frac{R}{N} < 1$ から

$$\left(\frac{R}{N}\right)^n \to 0 \quad (n \to +\infty)$$

が成立しますから，はさみうちの定理を用いると

$$\frac{1}{n!}R^n \to 0 \quad (n \to +\infty)$$

$X = 0, 1, 2, \cdots$

非負整数に値をとる確率変数 X を以下のように定義します． $\mu > 0$

$$0 < P(X = k) = e^{-\mu}\frac{\mu^k}{k!} \quad (k = 0, 1, 2, \cdots)$$

実際

$$\sum_{k=0}^{+\infty} P(X = k) = \sum_{k=0}^{+\infty} e^{-\mu}\frac{\mu^k}{k!} = e^{-\mu}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{\mu^k}{k!} = e^{-\mu}\cdot e^{\mu} = 1$$

$= e^{\mu}$

から全確率が 1 となるので，確率変数が定義できます．

期待値は

$$
\begin{aligned}
E[X] &= \sum_{k=0}^{+\infty} k \cdot P(X=k) = \sum_{k=1}^{+\infty} k \cdot \boxed{P(X=k)} \\
&= \sum_{k=1}^{+\infty} k \cdot \boxed{e^{-\mu}\frac{\mu^k}{k!}} = e^{-\mu}\sum_{k=1}^{+\infty} k \cdot \frac{\mu^k}{k!} \\
&= e^{-\mu}\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\mu^k}{(k-1)!} \\
\rightarrow \quad &= e^{-\mu}\sum_{\ell=0}^{+\infty} \frac{\mu^{\ell+1}}{\ell!} = e^{-\mu}\mu \underbrace{\sum_{\ell=0}^{+\infty} \frac{\mu^\ell}{\ell!}}_{= e^{\mu}} = \cancel{e^{-\mu}}\mu \cdot \cancel{e^{\mu}} = \mu
\end{aligned}
$$

$k = \ell + 1$

k	$\ell = k-1$
1	0
2	1
⋮	⋮

2 次のモーメントは

$k^2 = k^2 - k + k$

$= k(k-1) + k$

$= \mu$

$$
\begin{aligned}
E[X^2] &= \sum_{k=0}^{+\infty} k^2 \cdot P(X=k) \\
&= \sum_{k=0}^{+\infty} k(k-1) \cdot P(X=k) + \boxed{\sum_{k=0}^{+\infty} k \cdot P(X=k)} \\
&= \sum_{k=2}^{+\infty} k(k-1) e^{-\mu} \frac{\mu^k}{k!} + \mu = \sum_{k=2}^{+\infty} e^{-\mu} \boxed{\frac{\mu^k}{(k-2)!}} + \mu \\
&= \sum_{\ell=0}^{+\infty} e^{-\mu} \frac{\mu^{\ell+2}}{\ell!} + \mu = e^{-\mu}\mu^2 \underbrace{\sum_{\ell=0}^{+\infty} \frac{\mu^\ell}{\ell!}}_{= e^{\mu}} + \mu \\
&= e^{-\mu}\mu^2 \cdot e^{\mu} + \mu = \mu^2 + \mu
\end{aligned}
$$

$k = \ell + 2$

k	$\ell = k-2$
2	0
3	1
⋮	2
	⋮

$$V[X] = E[X^2] - (E[X])^2$$

$$= \mu^2 + \mu - \mu^2$$

$$= \mu$$

Poisson 分布 (4)

分散は

$$V[X] = E[X^2] - (E[X])^2 = \mu^2 + \mu - \mu^2 = \mu$$

$$(\sin t)' = \cos t$$

$$(\cos t)' = -\sin t$$

$\sin t$, $\cos t$ の Taylor 展開 (1)

$f(t) = \sin t$ に対して

$f'(t) = \cos t$, $\quad f''(t) = -\sin t$, $\quad f^{(3)}(t) = -\cos t$, $f^{(4)}(t) = \sin t$

と導関数を求めていくと周期が 4 であることが分かります．これから

$$f^{(k)}(t) = \begin{cases} \cos t & k = 1, 5, \cdots \\ -\sin t & k = 2, 6, \cdots \\ -\cos t & k = 3, 7, \cdots \\ \sin t & k = 0, 4, 8, \cdots \end{cases}$$

となり

$|f^{(k)}(t)| \leq 1$

$$f^{(k)}(0) = \begin{cases} 1 & k = 1, 5, \cdots \\ 0 & k = 2, 6, \cdots \\ -1 & k = 3, 7, \cdots \\ 0 & k = 0, 4, 8, \cdots \end{cases}$$

が分かります．

c_n

$0 \qquad t$

Taylor の定理を用いると $t \neq 0$ のとき

t^7

$$\sin t = t - \frac{1}{3!}t^3 + \frac{1}{5!}t^5 - \frac{1}{7!} + - \cdots + \frac{f^{(n-1)}(0)}{(n-1)!}t^{n-1} + \boxed{\frac{f^{(n)}(c_n)}{n!}t^n}$$

を満たす c_n が 0 と t の間に存在します.

$$\left|\sin t - \left(\sin t = t - \frac{1}{3!} + \frac{1}{5!}t^5 - \frac{1}{7!}t^7 + - \cdots + \frac{f^{(n-1)}(0)}{(n-1)!}t^{n-1}\right)\right|$$

$$= \left|\frac{f^{(n)}(c_n)}{n!}t^n\right| \leq \frac{|t|^n}{n!}$$

$|f^{(n)}(c_n)| \leq 1$

において $\frac{|t|^n}{n!} \to 0$ $(n \to +\infty)$ から

$$+ \quad - \quad + \quad -$$

$$\sin t = t - \frac{1}{3!}t^3 + \frac{1}{5!}t^5 - \frac{1}{7!}t^7 + - \cdots$$

が従います．同様に

$$\cos t = 1 - \frac{1}{2!}t^2 + \frac{1}{4!}t^6 - \frac{1}{6!}t^6 + - \cdots$$

訂正

偶数階の項しか出てこない.