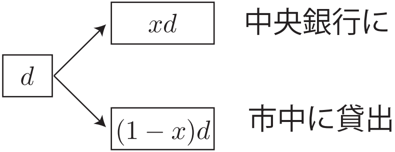
信用創造・幾何分布

Nobuyuki TOSE

CalcNT Lec02, May 13, 2020

市中銀行 (Commercial Banks) に預金 $\boldsymbol{d}$ されたとする．預金準備率が $\boldsymbol{x}$ とすると：



信用創造 (2)

市中に貸し出した $(\mathbf{1}-\boldsymbol{x})\boldsymbol{d}$ が預金として還流してくる.

$$\begin{tikzcd}
 & \boxed{x(1-x)d}\ \text{中央銀行に} \\
\boxed{(1-x)d} \arrow[ur] \arrow[dr] & \\
 & \boxed{(1-x)^2 d}\ \text{市中に貸出}
\end{tikzcd}$$

信用創造 (3)

これを繰り返すと市中に貸し出した金額の合計が

$$
\begin{aligned}
&(1-x)d + (1-x)^2 d + (1-x)^3 d + \cdots \\
&= (1-x)d\left(1 + (1-x) + (1-x)^2 + \cdots\right) \\
&= (1-x)d \cdot \frac{1}{1-(1-x)} = \frac{(1-x)d}{x}
\end{aligned}
$$

これを預金 d による信用創造 (Creation of Money) と呼びます.

$|r| < 1$ のとき

$$
1 + r + r^2 + r^3 + \cdots = \frac{1}{1-r}
$$

幾何級数 (1)　CT 98p 例 3.14

$0 < p < 1$, $q = 1 - p$ とします．$\mathbf{Z}_+$ に値をとる確率変数 X が幾何分布に従うとは

$$P(X = k) = p^k q \quad (k = 0, 1, 2, 3, \cdots)$$

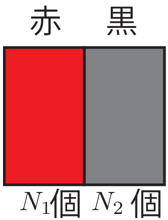
を満たすときです．実際

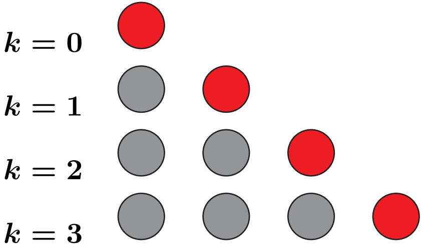
$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{+\infty} P(X = k) &= \sum_{k=0}^{+\infty} qp^k = q \sum_{k=0}^{+\infty} p^k \\ &= q \cdot \frac{1}{1-p} = \frac{q}{q} = 1\end{aligned}$$

幾何級数 (2)

X の意味は？袋の中に赤玉 N_1 個，黒玉 N_2 個が入っているとします．

袋から 1 個の玉を取り出しては戻すという試行を繰り返して，赤玉が出たときに止めます．このときまでに出た黒玉の個数が $X=k$ とします．



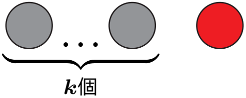


幾何級数 (3)

ここで

$$p = \frac{N_2}{N_1 + N_2}, \quad q = \frac{N_1}{N_1 + N_2}$$

とします．$X = k$ となる場合



の確率は

$$P(X = k) = p^k q$$

となります．

X の期待値は？

$$E[X] = \sum_{k=0}^{+\infty} kP(X=k) = \sum_{k=0}^{+\infty} k \cdot qp^k$$
$$= q\sum_{k=0}^{+\infty} kp^k = q\sum_{k=1}^{+\infty} kp^k = q \cdot \frac{p}{(1-p)^2} = \frac{p}{q}$$

ここで

$$\begin{array}{rrcccccccc} & T_n := & p & + & 2p^2 & +\cdots+ & np^n & & \\ -) & pT_n = & & & p^2 & +\cdots+ & (n-1)p^n & + & np^{n+1} \\ \hline & (1-p)T_n = & p & + & p^2 & +\cdots+ & p^n & - & np^{n+1} \\ & = & \multicolumn{7}{l}{\frac{p-p^{n+1}}{1-p} - np^{n+1}} \end{array}$$

から

$$T_n = \frac{p-p^{n+1}}{(1-p)^2} - \frac{np^{n+1}}{1-p} \to \frac{p}{(1-p)^2} \quad (n \to +\infty)$$