L11
演習問題

I (1) $\left(\frac{1}{1+x}\right)' = -\frac{1}{(1+x)^2}$ から $\left(-\frac{1}{1+x}\right)' = \frac{1}{(1+x)^2}$

となります。$R>0$ として

$$\int_0^R \frac{dx}{(1+x)^2} = \left[-\frac{1}{1+x}\right]_0^R = 1 - \frac{1}{1+R} \to 1$$

$(R \to +\infty)$

から $$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{(1+x)^2} = 1$$

(2) $\left\{(1+x)^{-\frac{1}{2}}\right\}' = -\frac{1}{2}(1+x)^{-\frac{3}{2}}$ から

$$\left\{-2(1+x)^{-\frac{1}{2}}\right\}' = (1+x)^{-\frac{3}{2}}$$

となるので $R>0$ として

$$\int_0^R (1+x)^{-\frac{3}{2}} dx = \left[-2(1+x)^{-\frac{1}{2}}\right]_0^R = 2 - \frac{1}{(1+R)^{\frac{1}{2}}}$$

から $\to 2 \quad (R \to +\infty)$

$$\int_0^{+\infty} (1+x)^{-\frac{3}{2}} dx = 2$$

(3) $\left(\frac{1}{2+3x}\right)' = -\frac{1}{(2+3x)^2} \cdot 3$

から

$$\left(-\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2+3x}\right)' = \frac{1}{(2+3x)^2}$$

となります。$R>0$ として

$$\int_0^R \frac{dx}{(2+3x)^2} = -\frac{1}{3}\left[\frac{1}{2+3x}\right]_0^R$$

$$= \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2+3R}\right) \to \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \quad (R \to +\infty)$$

から $$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{(2+3x)^2} = \frac{1}{6}$$

(4) $x = 2\tan\theta$ とおくと $dx = 2\dfrac{1}{\cos^2\theta}$ で

$$\frac{1}{4+x^2} = \frac{1}{4(1+\tan^2\theta)} = \frac{1}{4}\cdot\cos^2\theta$$

となるので

$$\int_0^R \frac{dx}{4+x^2} = \frac{1}{2}\int_0^{\theta_0} d\theta = \frac{1}{2}\theta_0$$

ただし θ_0 は $0 < \theta_0 < \frac{\pi}{2}$ $\tan\theta_0 = R$ を満たす.

$R \to +\infty$ のとき $\theta_0 \to \frac{\pi}{2}$ となるので

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{4+x^2} = \frac{\pi}{4}$$

(5) $R > 0$ とします.

$$I_R = \int_0^R x e^{-2x} dx = \int_0^R x \left(-\frac{1}{2}e^{-2x}\right)' dx$$

$$= \left[x\left(-\frac{1}{2}e^{-2x}\right)\right]_0^R + \frac{1}{2}\int_0^R e^{-2x} dx$$

$$= -\frac{R}{2}e^{-2R} + \frac{1}{2}\left[-\frac{1}{2}e^{-2x}\right]_0^R$$

$$= -\frac{R}{2}e^{-2R} + \frac{1}{4}\left(1 - e^{-2R}\right)$$

となる $Re^{-2R} \to 0$, $e^{-2R} \to 0$ $(R \to +\infty)$ から

$I_R \to \frac{1}{4}$ $(R \to +\infty)$ 従って

$$\int_0^{+\infty} x e^{-2x} dx = \frac{1}{4}$$

(6)

$$\int_0^R xe^{-x}\,dx = \int_0^R x(-e^{-x})'\,dx$$

$$= \left[-xe^{-x}\right]_0^R + \int_0^R e^{-x}\,dx.$$

$$= -Re^{-R} + \left[-e^{-x}\right]_0^R$$

$$= -Re^{-R} + (1-e^{-R}) \to -0+1+0=1$$

$$(R \to +\infty)$$

であるので、

$$\int_0^R x^2 e^{-x}\,dx = \int_0^R x^2(-e^{-x})'\,dx$$

$$= \left[-x^2 e^{-x}\right]_0^R + 2\int_0^R x e^{-x}\,dx$$

$$= -R^2e^{-R} + 2\int_0^R xe^{-x}\,dx$$

$$\to 0 + 2\int_0^{+\infty} xe^{-x}\,dx = 2 \quad (R\to+\infty)$$

から

$$\int_0^{+\infty} x^2 e^{-x}\,dx = 2$$

(7) $I_n = \int_0^{+\infty} x^n e^{-x}\,dx$ を求めよ.

No.

(7) $R > 1$ とする.

$$\int_1^R \frac{\log x}{x^2}\,dx = -\int_1^R \left(\frac{1}{x}\right)' \log x\,dx$$

$$= \left[-\frac{\log x}{x}\right]_1^R + \int_0^R \frac{1}{x}\cdot\frac{1}{x}\,dx$$

$$= -\frac{\log R}{R} + \left[-\frac{1}{x}\right]_0^R$$

$$= -\frac{\log R}{R} - \frac{1}{R} + 1 \longrightarrow 0 + 0 + 1 = 1$$

II (1) $0<a<b$ とする.

$$P(a<Z<b) = P(\log a < X < \log b)$$

$$= \int_{\log a}^{\log b} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2} dx$$

$$\underset{\uparrow}{=} \int_a^b \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(\log z)^2} \frac{1}{z} dz.$$

$x=\log z$ とすると

密度関数は $\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \dfrac{e^{-\frac{1}{2}(\log z)^2}}{z}$

(2) $0 \leq a < b$ とする.

$$P(a \leq W \leq b) = P(-\sqrt{b} \leq X \leq -\sqrt{a}) + P(\sqrt{a} \leq X \leq \sqrt{b})$$

$$= 2P(\sqrt{a} \leq X \leq \sqrt{b})$$

$$\underset{\uparrow}{=} 2 \int_{\sqrt{a}}^{\sqrt{b}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2} dx$$

$z=x^2$ におきかえ $x=\sqrt{z}$ $dx = \frac{1}{2\sqrt{z}} dz$.

$$= 2 \int_a^b \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}z} \cdot \frac{1}{2\sqrt{z}} dz.$$

$$= \int_a^b \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{e^{-\frac{1}{2}z}}{\sqrt{z}} dz$$

から

$\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \dfrac{e^{-\frac{1}{2}z}}{\sqrt{z}}$ が密度関数（χ 自乗分布）