

極大・極小の必要条件（補足）

Nobuyuki TOSE

微分積分第 2 講義 Part 01, Oct 12, 2020

(復習) 極大・極小の必要条件 (1変数の場合)

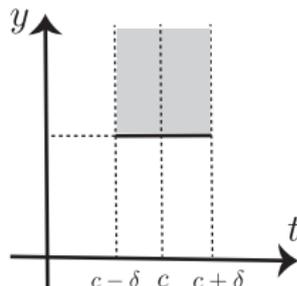
定理 (復習)

各点で微分可能な $f :]a, b[\rightarrow \mathbf{R}$ が $c \in]a, b[$ で極大 (または極小) ならば

$$f'(c) = 0$$

$f(c)$ が極小値である

$$\Leftrightarrow \exists \delta > 0 (c - \delta < t < c + \delta \Rightarrow f(t) \geq f(c))$$



極小でないとは

$f(c)$ が極小値でない

$$\Leftrightarrow \text{NOT } \exists \delta > 0 (c - \delta < t < c + \delta \Rightarrow f(t) \geq f(c))$$

$$\Leftrightarrow \forall \delta > 0 \text{ NOT } (c - \delta < t < c + \delta \Rightarrow f(t) \geq f(c))$$

$$\Leftrightarrow \forall \delta > 0 \exists t \in (c - \delta, c + \delta) f(t) < f(c)$$

定理の逆は成立するか？ (1)

定理の逆は成立しません。

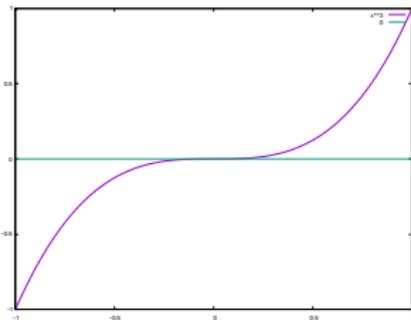
反例 $f(t) = t^3$ とすると $f'(t) = 3t^2$ なので $f'(0) = 0$ から $t = 0$ は f の停留点である。任意の $\delta > 0$ に対して

$$-\delta < t < 0 \Rightarrow f(t) < 0 = f(0)$$

であるので

$$-\delta < t < \delta \Rightarrow f(t) \geq f(0) = 0$$

を満たす正数 $\delta > 0$ は存在しません。従って f は $t = 0$ で極小ではありません。



定理の逆は成立するか？ (2)

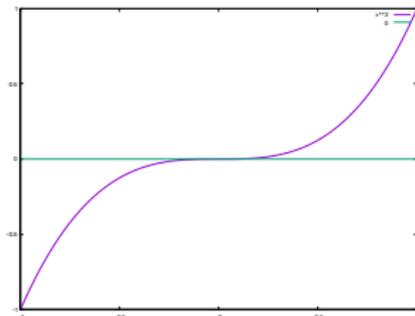
他方, 任意の $\delta > 0$ に対して

$$0 < t < \delta \Rightarrow f(0) = 0 < f(t)$$

であるので

$$-\delta < t < \delta \Rightarrow f(t) \leq f(0) = 0$$

を満たす正数 $\delta > 0$ は存在しません. 従って f は $t = 0$ で極大ではありません.



極大・極小の十分条件

定理

$f :]a, b[\rightarrow \mathbf{R}$ が $]a, b[$ の各点で微分可能, f' も $]a, b[$ の各点で微分可能とします. さらに f'' が $]a, b[$ の各点で連続とします. このとき $t = c \in]a, b[$ において

$$f'(c) = 0, \quad f''(c) > 0 \quad (\text{resp. } f''(c) < 0)$$

ならば f は $t = c$ で極小 (resp. 極大) となります.

この定理も前期に証明しました.

極大点・極小点であることの必要条件（復習）

\mathbf{R}^2 の開集合 U 上の関数

$$f : U \rightarrow \mathbf{R}$$

が U の各点 $P \in U$ で x, y について偏微分できると仮定します.

Theorem

f が $P_0(a, b) \in U$ で極小（極大）ならば

$$f_x(a, b) = f_y(a, b) = 0 \tag{1}$$

が成立します.

この状況で (1) を満たす点 $P_0(a, b)$ を f の**停留点**と呼びます.

停留点であることは極大・極小の十分条件ではない (1)

$$f(x, y) = x^2 - y^2$$

を考えましょう。

$$f_x(x, y) = 2x = 0, \quad f_y(x, y) = -2y = 0$$

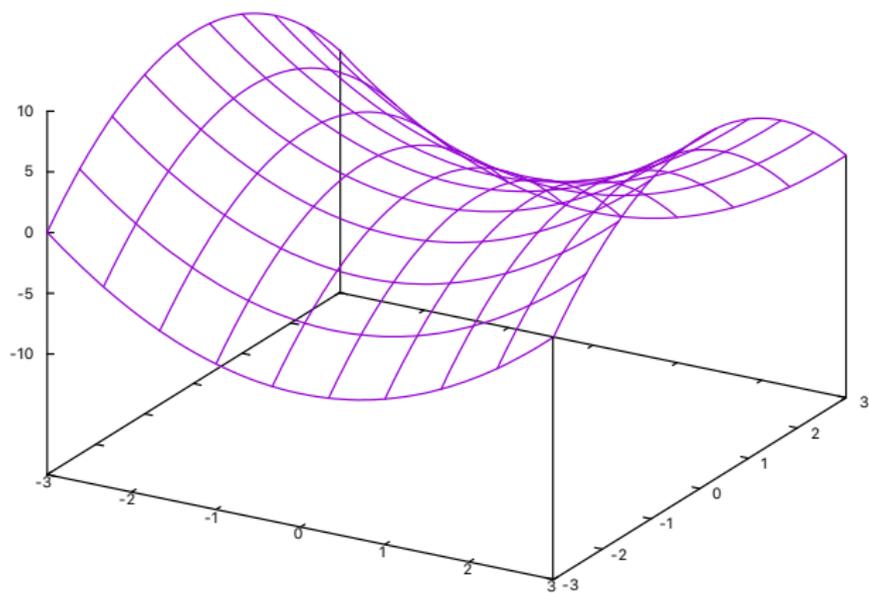
から f の停留点は $(x, y) = (0, 0)$ です。

$$f(x, 0) = x^2, \quad f(0, y) = -y^2$$

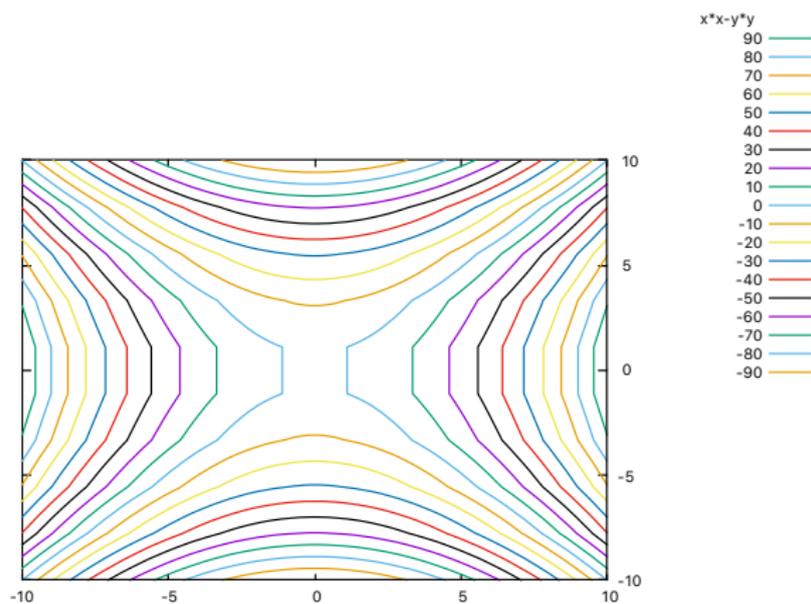
から $(0, 0)$ で f は極大でも極小でもないことが分かります。

停留点であることは極大・極小の十分条件ではない (2)

x^2x-y^2y —



停留点であることは極大・極小の十分条件ではない (3)



極大・極小の十分条件

定理

\mathbf{R}^2 の開集合 U 上の C^2 級関数 $f: U \rightarrow \mathbf{R}$ に対して $P_0(a, b) \in U$ が停留点であるとします。

$$f_x(P_0) = f_y(P_0) = 0$$

$$(1) \begin{vmatrix} f_{xx}(P_0) & f_{xy}(P_0) \\ f_{yx}(P_0) & f_{yy}(P_0) \end{vmatrix} > 0, f_{xx}(P_0) > 0 \text{ (resp. } f_{xx}(P_0) < 0)$$

であるならば P_0 で f は極小 (resp. 極大) となります。

$$(2) \begin{vmatrix} f_{xx}(P_0) & f_{xy}(P_0) \\ f_{yx}(P_0) & f_{yy}(P_0) \end{vmatrix} < 0 \text{ ならば } f \text{ は } P_0 \text{ で } f \text{ は極小でも極大でもありません。}$$

今後当分の間、この定理の証明の準備をしながらいろんなことを学びます。