1　偏微分法

2020 年 10 月 07 日演習問題解答

I 偏導関数 f_x と f_y を計算しましょう．
(1) $f(x,y)=(2x+3y)(3x+5y)$　**(2)** $f(x,y)=\frac{x}{1+y^2}$　**(3)** $f(x,y)=(2x+5y)^3$
(4) $f(x,y)=\left(\frac{2x+3y}{x+2y}\right)^2$　**(5)** $f(x,y)=ye^{x+y}$

解答 (1)

$$
\begin{aligned}
f_x &= 2\cdot(3x+5y)+(2x+3y)\cdot 3 = 12x+19y \\
f_y &= 3\cdot(3x+5y)+(2x+3y)\cdot 5 = 19x+30y
\end{aligned}
$$

(2)

$$
\begin{aligned}
f_x &= \frac{1}{1+y^2} \\
f_y &= x\left(-\frac{2y}{(1+y^2)^2}\right) = -\frac{2xy}{(1+y^2)^2}
\end{aligned}
$$

(3)

$$
\begin{aligned}
f_x &= 2\left(\frac{2x+3y}{x+2y}\right)\frac{2\cdot(x+2y)-(2x+3y)\cdot 1}{(x+2y)^2} \\
&= \frac{2y(2x+3y)}{(x+2y)^3} \\
f_y &= 2\left(\frac{2x+3y}{x+2y}\right)\frac{3\cdot(x+2y)-(2x+3y)\cdot 2}{(x+2y)^2} \\
&= -\frac{2x(2x+3y)}{(x+2y)^3}
\end{aligned}
$$

(4)

$$
\begin{aligned}
f_x &= 3(2x+5y)\cdot 2 = 6(2x+5y)^2 \\
f_y &= 3(2x+5y)\cdot 5 = 15(2x+5y)^2
\end{aligned}
$$

(5)

$$
\begin{aligned}
f_x &= y\cdot e^{x+y}\cdot 1 = ye^{x+y} \\
f_y &= 1\cdot e^{x+y}+y\cdot e^{x+y}\cdot 1 = (y+1)e^{x+y}
\end{aligned}
$$

II 以下の函数の停留点を求めましょう．
(1) $z=x^2+xy+y^2-4x-8y$
(2) $z=x^3+y^3-9xy+27$
(3) $z=x^2+xy-y^2-4x-2y$
(4) $z=x^2+4xy+2y^2-6x-8y$
(5) $z=x^3-xy-y^2$
(6) $z=e^{-x^2-y^2}(2x^2+y^2)$
(7) $z=(x^2+y^2)^2-2(x^2-y^2)$
(8) $z=x^3+y^3+6xy$

(1)

$$\begin{cases} z_x &= 2x+y-4 &= 0 \\ z_y &= x+2y-8 &= 0 \end{cases}$$

をクラメールの公式を使って解くと

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 8 & 2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}} = \frac{0}{3} = 0, \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 8 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}} = \frac{12}{3} = 4$$

となりますから，$(x,y)=(0,4)$ が z の停留点であることが分かります.

(2)

$$\begin{cases} z_x &= 3x^2-9y &= 0\cdots(I) \\ z_y &= 3y^2-9x &= 0\cdots(II) \end{cases}$$

を解きます. (I) から $y=\frac{1}{3}x^2$ となるので (II) から得られる $y^2=3x$ に代入して

$$\frac{1}{9}x^4 = 3x \quad \text{すなわち} \quad x^4 = 27x$$

を得ます. 従って

$$x = 0 \quad \text{または} \quad x = 3$$

が必要です.

(a) $\underline{x=0\text{ のとき}}$, (I) から $y=0$ となりますが、逆に $(x,y)=(0,0)$ は (I) かつ (II) を満たします.

(b) $\underline{x=3\text{ のとき}}$, (I) から $y=3$ となりますが、逆に $(x,y)=(3,3)$ は (I) かつ (II) を満たします.

以上で z の停留点は $(x,y)=(0,0),(3,3)$ であることが分かりました.

(3)

$$\begin{cases} z_x &= 2x+y-4 &= 0 \\ z_y &= x-2y-2 &= 0 \end{cases}$$

をクラメールの公式で解くと

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix}} = \frac{-10}{-5} = 2, \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix}} = \frac{0}{-5} = 0$$

となりますから，$(x,y)=(2,0)$ が z の停留点であることが分かります.

(4)

$$\begin{cases} z_x &= 2x+4y-6 &= 0 \\ z_y &= 4x+4y-8 &= 0 \end{cases}$$

をクラメールの公式で解くと

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 6 & 4 \\ 8 & 4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 4 \end{vmatrix}} = \frac{-8}{-8} = 1, \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 6 \\ 4 & 8 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 4 \end{vmatrix}} = \frac{-8}{-8} = 1$$

から停留点は $(x,y)=(1,1)$ となります.

(5)

$$\begin{cases} z_x &= 3x^2-y &= 0 & (i) \\ z_y &= -x-2y &= 0 & (ii) \end{cases}$$

を解きます。(ii) から $x=-2y$ となりますが，これを (i) に代入して

$$12y^2 - y = 0$$

を得ますが，これから $y=0$ または $y=\frac{1}{12}$ であることが分かります. これを $x=-2y$ に代入して

$$\begin{array}{lll} y=0 & \text{のとき} & x=0 \\ y=\frac{1}{12} & \text{のとき} & x=-\frac{1}{6} \end{array}$$

となりますから，停留点は

$$(x,y)=(0,0), \quad (-\frac{1}{6},\frac{1}{12})$$

であることが分かります.

(6) まず関数

$$z = e^{-x^2-y^2}(2x^2+y^2)$$

の停留点を求めましょう. まず z の偏導関数を計算すると

$$\begin{aligned} z_x &= e^{-x^2-y^2}(-2x)(2x^2+y^2)+e^{-x^2-y^2}(4x) \\ &= 2xe^{-x^2-y^2}(-2x^2-y^2+2) \\ z_y &= e^{-x^2-y^2}(-2y)(2x^2+y^2)+e^{-x^2-y^2}(2y) \\ &= 2ye^{-x^2-y^2}(-2x^2-y^2+1) \end{aligned}$$

となります．$e^{-x^2-y^2} > 0$ ですから

$$
\begin{aligned}
& z_x = z_y = 0 \\
\Leftrightarrow\ & x(2x^2+y^2-2)=0 \\
& \qquad \text{and } y(2x^2+y^2-1)=0 \\
\Leftrightarrow\ & (x=0 \text{ or } 2x^2+y^2=2) \\
& \qquad \text{and } (y=0 \text{ or } 2x^2+y^2=1) \\
\Leftrightarrow\ & (x=y=0) \\
& \qquad \text{or } (x=0 \text{ and } 2x^2+y^2=1) \\
& \quad \text{or } (y=0 \text{ and } 2x^2+y^2=2) \\
& \quad \text{or } (2x^2+y^2=2 \text{ and } 2x^2+y^2=1) \\
\Leftrightarrow\ & (x=y=0) \text{ or } (x=0 \text{ and } y^2=1) \\
& \quad \text{or } (y=0 \text{ and } x^2=1) \\
& \quad \text{or } (2x^2+y^2=2 \text{ and } 2x^2+y^2=1) \\
\Leftrightarrow\ & (x,y)=(0,0),(0,\pm1),(\pm1,0)
\end{aligned}
$$

が成立します．従って z の停留点は $(x,y) = (0,0),(0,\pm1),(\pm1,0)$ です．

(7) $f(x,y)$ の偏導関数は

$$
\begin{aligned}
f_x &= 2(x^2+y^2)\cdot 2x - 4x = 4x(x^2+y^2-1) \\
f_y &= 2(x^2+y^2)\cdot 2y - 4x = 4y(x^2+y^2+1)
\end{aligned}
$$

と計算されます。このことから

$$
\begin{aligned}
f_x = 0 &\Leftrightarrow (x=0) \text{ OR } (x^2+y^2=1) \\
f_y = 0 &\Leftrightarrow y=0
\end{aligned}
$$

が従いますので

$$
\begin{aligned}
f_x = f_y = 0 &\Leftrightarrow (x=y=0) \\
&\qquad \text{OR } (x^2+y^2=1, \text{AND } y=0) \\
&\Leftrightarrow (x,y)=(0,0),\ (\pm1,0)
\end{aligned}
$$

が分かります。以上で f の停留点は $(0,0)$, $(1,0)$, $(-1,0)$ の 3 点であることが示されました。

(8)（コアテキストの 282 ページの例 8.18）
z の偏導関数は

$$
\begin{cases}
z_x = 3x^2+6y = 0 \cdots (1) \\
z_y = 3y^2+6x = 0 \cdots (2)
\end{cases}
$$

と計算されます．(2) から $x = -\frac{1}{2}y^2$ を得ますが，これを (1) から得られる $y = -\frac{1}{2}x^2$ に代入すると

$$
y = -\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}y^2\right)^2 = -\frac{1}{8}y^4
$$

が導かれます．従って

$$
y(y^3+8)=0
$$

から $y=0$ または $y=-2$ であることが必要条件であることが分かります．このとき

(i) $y=0$ のとき (2) に代入して $x=0$
(ii) $y=-2$ のとき (2) から $x=-2$ を得る．

を得ます．以上で停留点は

$$
(x,y) = (0,0) \text{または} (-2,-2)
$$

であることが示されました．