2020 年 7 月 8 日演習問題解答

I $f(t) = \sin t$ に対して 3 階の Taylor の定理を $a = 0$, $b = t$ の形で適用しましょう.

（解答）

$$f(t) = \sin t,\ f'(t) = \cos t,\ f''(t) = -\sin t$$

から

$$f(0) = 0,\ f'(0) = 1,\ f''(0) = 0$$

であるとが分かります．従って $t \neq 0$ のとき

$$f(t) = f(0) + f'(0)t + \frac{1}{2}f''(0)t^2 + \frac{1}{3!}f^{(3)}(c)t^3$$

すなわち

$$\sin t = t - \frac{\cos c}{3!}t^3$$

を満たす c が 0 と t の間に存在します.

II $g(t) = \cos t$ に対して 3 階の Taylor の定理を $a = 0$, $b = t$ の形で適用しましょう.

（解答）

$$g(t) = \cos t,\ g'(t) = -\sin t,\ g''(t) = -\cos t$$

から

$$g(0) = 1,\ g'(0) = 0,\ g''(0) = -1$$

であるとが分かります．従って $t \neq 0$ のとき

$$g(t) = g(0) + g'(0)t + \frac{1}{2}g''(0)t^2 + \frac{1}{3!}f^{(3)}(c)t^3$$

すなわち

$$\cos t = 1 - \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{3!}\sin c \cdot t^3$$

を満たす c が t と 0 の間に存在します.

III

$$\lim_{t \to 0} \frac{\sin t - t}{t^3}$$

を Taylor の定理または Cauchy の平均値の定理を用いて求めましょう．L'Hôpital の定理は用いてはいけません.

（解答） 問題 **I** から $t \neq 0$ のとき

$$\frac{\sin t - t}{t^3} = -\frac{1}{3!}\cos c$$

を満たす c が 0 と t の間に存在することが分かります．$t \to 0$ のとき $c \to 0$ となるので，$\cos c \to 1$ から

$$\frac{\sin t - t}{t^3} = -\frac{1}{3!}\cos c \to -\frac{1}{3!} = -\frac{1}{6}$$

となります．

他方，Cauchy の平均値の定理を用いるならば以下のように議論します．

$$f(t) = \sin t - t, \quad g(t) = t^3$$

とすると

$$f(0) = g(0) = 0$$

が成立します．このとき

$$\frac{f(t)}{g(t)} = \frac{f(t) - f(0)}{g(t) - g(0)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = \frac{\cos\xi - 1}{3\xi^2}$$

を満たす ξ が 0 と t の間に存在します．さらに

$$f'(0) = 0, \quad g'(0) = 0$$

から

$$\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = \frac{f'(\xi) - f'(0)}{g'(\xi) - g'(0)} = \frac{f''(\eta)}{g''(\eta)} = \frac{-\sin\eta}{6\eta} = -\frac{1}{6}\cdot\frac{\sin\eta}{\eta}$$

を満たす η が ξ と 0 の間に存在します．$x \to 0$ のとき $\xi \to 0$ となり，さらに $\eta \to 0$ となります．このとき

$$\frac{\sin\eta}{\eta} \to 1$$

となりますから，

$$\frac{f(t)}{g(t)} = -\frac{1}{6}\cdot\frac{\sin\eta}{\eta} \to -\frac{1}{6}$$

であることが分かります．

VI $f(t) = \sin t$ に 4 階の Taylor の定理を適用して不等式

$$\sin t > t - \frac{1}{3!}t^3 \quad (0 < t < \pi)$$

を示しましょう．

（解答）

$$f(t) = \sin t,\ f'(t) = \cos t,\ f''(t) = -\sin t,\ f^{(3)}(t) = -\cos t,\ f^{(4)}(t) = \sin t$$

から

$$f(0) = 0,\ f'(0) = 1,\ f''(0) = 0,\ f^{(3)}(0) = -1$$

であるとが分かります．従って $t \neq 0$ のとき，特に $0 < t < \pi$ のとき

$$f(t) = f(0) + f'(0)t + \frac{1}{2}f''(0)t^2 + \frac{1}{3!}f^{(3)}(0)t^3 + \frac{1}{4!}f^{(4)}(c)t^4$$

すなわち

$$\sin t = t - \frac{1}{3!}t^3 + \frac{1}{4!}\sin c \cdot t^4$$

を満たす c が 0 と t の間に存在します．このとき

$$0 < c < \pi$$

が成立しますから $\sin c > 0$ であることが分かります．他方 $x > 0$ から $x^4 > 0$ となりますから

$$\frac{1}{4!}\sin c \cdot t^4 > 0$$

であることが分かり，

$$\sin t > t - \frac{1}{3!}t^3 \quad (0 < t < \pi)$$

が従います.

V

$$\varphi(x) = -\frac{x}{2} + \sqrt{1 - \frac{3}{4}x^2}$$

が

$$x^2 + x\varphi(x) + \varphi(x)^2 - 1 = 0$$

が成立することを用いて $\varphi'(x)$, $\varphi''(x)$ を x と $\varphi(x)$ で表しましょう.

（解答）

$$x^2 + x\varphi(x) + \varphi(x)^2 - 1 \equiv 0 \tag{1}$$

の両辺を x で微分すると

$$2x + 1 \cdot \varphi(x) + x \cdot \varphi'(x) + 2\varphi(x)\varphi'(x) \equiv 0 \tag{2}$$

から

$$\varphi'(x) = -\frac{2x + \varphi(x)}{x + 2\varphi(x)} \tag{3}$$

が従います．(2) を x で微分すると

$$2 + \varphi'(x) + 1 \cdot \varphi'(x) + x\varphi''(x) + 2\varphi'(x)^2 + 2\varphi(x)\varphi''(x) \equiv 0$$

すなわち

$$2 + 2\varphi'(x) + 2\varphi'(x)^2 + (x + 2\varphi(x))\varphi''(x) \equiv 0$$

から

$$\begin{aligned}\varphi''(x) &= -\frac{2 + 2\varphi'(x) + 2\varphi'(x)^2}{x + 2\varphi(x)} \\ &= -2 \cdot \frac{3x^2 + 3x\varphi(x) + 3\varphi(x)^2}{(x + 2\varphi(x))^3} \\ &= -\frac{6}{(x + 2\varphi(x))^3}\end{aligned}$$

となります.

VI

$$\varphi(x) = \frac{1-x}{x-2}$$

が

$$x\varphi(x) + x - 2\varphi(x) - 1 = 0$$

を満たすことを用いて以下を考えましょう.

(1)

$$\varphi'(x) = \frac{1+\varphi(x)}{2-x}$$

が成立することを示しましょう.

(2) $\varphi''(x)$ を x と $\varphi(x)$ で表しましょう.

(解答) (1)

$$x\varphi(x) + x - 2\varphi(x) - 1 \equiv 0$$

の両辺を x で微分すると

$$1 \cdot \varphi(x) + x\varphi'(x) + 1 - 2\varphi'(x) \equiv 0 \tag{i}$$

すなわち

$$\varphi(x) + (x-2)\varphi'(x) \equiv 0 \tag{ii}$$

となります. $\varphi(x) \neq 2$ ですから

$$\varphi'(x) = -\frac{\varphi(x)+1}{x-2} \tag{iii}$$

であることが分かります.

(2) (ii) 式の両辺を微分して

$$\varphi'(x) + 1 \cdot \varphi'(x) + (x-2)\varphi''(x) \equiv 0$$

から

$$\varphi''(x) = \frac{-2\varphi'(x)}{x-2} = \frac{2(\varphi(x)+1)}{(x-2)^2}$$

となります.

VII $\varphi(x)$ が

$$x^2 - x\varphi(x) + \varphi(x)^2 - 3 = 0$$

を満たすことを用いて, $\varphi'(x)$ と $\varphi''(x)$ を x と $\varphi(x)$ で表しましょう.

(解答)

$$x^2 - x\varphi(x) + \varphi(x)^2 - 3 \equiv 0$$

の両辺を x で微分して

$$2x - 1 \cdot \varphi(x) - x\varphi'(x) + 2\varphi(x)\varphi'(x) \equiv 0 \tag{1}$$

すなわち

$$2x - \varphi(x) - (x - 2\varphi(x))\varphi'(x) \equiv 0 \tag{2}$$

を得ます．これから

$$\varphi'(x) = \frac{\varphi(x) - 2x}{2\varphi(x) - x}$$

であることが分かります．さらに (1) 式を微分すると

$$2 - \varphi'(x) - 1 \cdot \varphi'(x) - x\varphi''(x) + 2\varphi'(x)^2 + 2\varphi(x)\varphi''(x) \equiv 0$$

すなわち

$$(2\varphi(x) - x)\varphi''(x) + 2 - 2\varphi'(x) + 2\varphi'(x)^2$$

を得ます．これから

$$\begin{aligned}\varphi''(x) &= -\frac{2 - 2\varphi'(x) + 2\varphi'(x)^2}{2\varphi(x) - x} \\ &= -\frac{6(\varphi(x)^2 - x\varphi(x) + x^2)}{(2\varphi(x) - x)^3} = -\frac{18}{(2\varphi(x) - x)^3}\end{aligned}$$

となります.