

Lec 05, 2020年06月03日演習問題解答

I 以下の数列 $\{x_n\}$ に対して

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = +\infty$$

が成立することを示しましょう.

(1) $x_n = \frac{8n^2-3}{2n+3}$ (2) $x_n = \frac{n^3-n}{n^2+1}$ (3) $x_n = \frac{4^n-2^n}{3^n+2^n}$

解答 (1)

$$x_n = \frac{8n^2-3}{2n+3} = n \cdot \frac{8n^2-3}{n(2n+3)} = n \cdot \frac{8-\frac{3}{n^2}}{2+\frac{3}{n}}$$

において $n \rightarrow +\infty$ のとき

$$n \rightarrow +\infty, \quad \frac{8-\frac{3}{n^2}}{2+\frac{3}{n}} \rightarrow \frac{8-0}{2+0} = 4 > 0$$

なので

$$x_n = n \cdot \frac{8-\frac{3}{n^2}}{2+\frac{3}{n}} \rightarrow +\infty$$

となります.

(2)

$$x_n := \frac{n^3-n}{2n+5} = n^2 \cdot \frac{n^3-n}{n^2(2n+5)} = n^2 \cdot \frac{1-\frac{1}{n^2}}{(2+\frac{5}{n})}$$

において $n \rightarrow +\infty$ のとき

$$n^2 \rightarrow +\infty, \quad \frac{1-\frac{1}{n^2}}{(2+\frac{5}{n})} \rightarrow \frac{1-0}{2+0} = \frac{1}{2} > 0$$

なので

$$x_n = n^2 \cdot \frac{1-\frac{1}{n^2}}{(2+\frac{5}{n})} \rightarrow +\infty$$

(3)

$$x_n := \frac{4^n-2^n}{3^n+2^n} = \frac{4^n}{3^n} \cdot \frac{3^n(4^n-2^n)}{4^n(3^n+2^n)} = \left(\frac{4}{3}\right)^n \cdot \frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1+\left(\frac{2}{3}\right)^n}$$

において $n \rightarrow +\infty$ のとき

$$\left(\frac{4}{3}\right)^n \rightarrow +\infty, \quad \frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1+\left(\frac{2}{3}\right)^n} \rightarrow \frac{1-0}{1+0} = 1 > 0$$

から

$$x_n = \left(\frac{4}{3}\right)^n \cdot \frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1+\left(\frac{2}{3}\right)^n} \rightarrow +\infty$$

II 以下の関数 $f(x)$ に対して極限 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ を求めましょう.

(1) $f(x) = \frac{x}{x^2+5}$ (2) $f(x) = \frac{2x+3}{x-1}$ (3) $f(x) = \sqrt{x^2+2x+4} - \sqrt{x^2+4}$ (4) $f(x) = \frac{x^2+5x+6}{x+1}$ (5) $f(x) = \frac{x+3}{x^2+5x+6}$

解答 (1) $x \rightarrow +\infty$ のとき

$$f(x) := \frac{x}{x^2+5} = \frac{1}{x} \cdot \frac{x^2}{x^2+5} = \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{1+\frac{5}{x^2}} \rightarrow 0 \cdot \frac{1}{1+0} = 0$$

(2) $x \rightarrow +\infty$ のとき

$$f(x) := \frac{2x+3}{x-1} = \frac{2+\frac{3}{x}}{1-\frac{1}{x}} \rightarrow \frac{2+0}{1-0} = 2$$

(3) $x \rightarrow +\infty$ のとき

$$\begin{aligned} f(x) &:= \sqrt{x^2+2x+4} - \sqrt{x^2+4} = \frac{(x^2+2x+4) - (x^2+4)}{\sqrt{x^2+2x+4} + \sqrt{x^2+4}} = \frac{2x}{\sqrt{x^2+2x+4} + \sqrt{x^2+4}} \\ &= \frac{2}{\sqrt{1+\frac{2}{x}+\frac{4}{x^2}} + \sqrt{1+\frac{4}{x^2}}} \rightarrow \frac{2}{\sqrt{1+0+0} + \sqrt{1+0}} = \frac{2}{1+1} = 1 \end{aligned}$$

(4)

$$f(x) = \frac{x^2+5x+6}{x+1} = x \cdot \frac{x^2+5x+6}{x(x+1)} = x \cdot \frac{1+5\frac{1}{x}+6\frac{1}{x^2}}{1+\frac{1}{x}}$$

において $x \rightarrow +\infty$ のとき

$$x \rightarrow +\infty, \quad \frac{1+5\frac{1}{x}+6\frac{1}{x^2}}{1+\frac{1}{x}} \rightarrow \frac{1+5\cdot 0+6\cdot 0}{1+0} = 1 > 0$$

であるので

$$f(x) = x \cdot \frac{1+5\frac{1}{x}+6\frac{1}{x^2}}{1+\frac{1}{x}} \rightarrow +\infty$$

(5) $x \rightarrow +\infty$ のとき

$$f(x) := \frac{x+3}{x^2+5x+6} = \frac{1}{x} \cdot \frac{x(x+3)}{x^2+5x+6} = \frac{1}{x} \cdot \frac{1+\frac{3}{x}}{1+5\frac{1}{x}+6\frac{1}{x^2}} \rightarrow 0 \cdot \frac{1+0}{1+5\cdot 0+6\cdot 0} = 0 \cdot 1$$

III 数列 $\{x_n\}, \{y_n\}$ が

$$x_n \rightarrow +\infty, \quad y_n \rightarrow \alpha \in \mathbf{R} \quad (n \rightarrow +\infty)$$

を満たします。このとき

$$x_n + y_n \rightarrow +\infty \quad (n \rightarrow +\infty)$$

が成立することを示しましょう。

解答 $y_n \rightarrow \alpha (n \rightarrow +\infty)$ から

$$\exists N_0 (n \geq N_0 \Rightarrow \alpha - 1 < y_n < \alpha + 1)$$

であることが分かります。 $x_n \rightarrow +\infty (n \rightarrow +\infty)$ から、任意の $R > 0$ に対して

$$\exists N_1 (n \geq N_1 \Rightarrow R - (\alpha - 1) < x_n)$$

であることが分かります。このとき $n \geq N := \max(N_0, N_1)$ ならば $n \geq N_0$ かつ $n \geq N_1$ なので

$$R = (\alpha - 1) + R - (\alpha - 1) < x_n + y_n$$

が成立します。これから

$$x_n + y_n \rightarrow +\infty$$

であることが分かります。

IV 函数 $y = \frac{x^2 - 3x + 3}{x - 2}$ について考えます。

- (1) 導関数 y' を求めましょう。
 (2) $y = ax + b + \frac{c}{x-2}$ を満たす定数 a, b, c を求めましょう。
 (3) y の増減表を求めてグラフを求めましょう。

解答 (1)

$$\begin{aligned} y' &= \frac{(x^2 - 3x + 3)'(x - 2) - (x^2 - 3x + 3)(x - 2)'}{(x - 2)^2} \\ &= \frac{(2x - 3)(x - 2) - (x^2 - 3x + 3) \cdot 1}{(x - 2)^2} \\ &= \frac{x^2 - 4x + 3}{(x - 2)^2} = \frac{(x - 1)(x - 3)}{(x - 2)^2} \end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned} y &= \frac{x(x - 2) - x + 3}{x - 2} = x + \frac{-x + 3}{x - 2} \\ &= x + \frac{-(x - 2) + 1}{x - 2} = x - 1 + \frac{1}{x - 2} \end{aligned}$$

(3) (1) から y' の符号は

$$y' \begin{cases} \geq 0 & \Leftrightarrow \begin{cases} x < 1 \text{ OR } x > 3 \\ x = 1, 3 \end{cases} \\ \leq 0 & \Leftrightarrow \begin{cases} 1 < x < 3 \end{cases} \end{cases}$$

となりますから、増減表は

x		1		2		3	
y'	+	0	-	/	-	0	+
y	\nearrow	-1	\searrow	/	\searrow	3	\nearrow

となります。次に無限遠方と不連続点を与える $x = 2$ の近くでの漸近挙動について考えます。

$x \rightarrow +\infty$ のとき

$$y = x \cdot \frac{x^2 - 3x + 3}{x(x - 2)} = x \cdot \frac{1 - \frac{3}{x} + \frac{3}{x^2}}{1 - \frac{2}{x}}$$

において $x \rightarrow +\infty$ のとき

$$x \rightarrow +\infty, \quad \frac{1 - \frac{3}{x} + \frac{3}{x^2}}{1 - \frac{2}{x}} \rightarrow \frac{1 - 0 - 0}{1 - 0} = 1 > 0$$

から

$$y = x \cdot \frac{1 - \frac{3}{x} + \frac{3}{x^2}}{1 - \frac{2}{x}} \rightarrow +\infty$$

となります。

$x \rightarrow -\infty$ のとき

$$y = x \cdot \frac{x^2 - 3x + 3}{x(x - 2)} = x \cdot \frac{1 - \frac{3}{x} + \frac{3}{x^2}}{1 - \frac{2}{x}}$$

において $x \rightarrow -\infty$ のとき

$$x \rightarrow -\infty, \quad \frac{1 - \frac{3}{x} + \frac{3}{x^2}}{1 - \frac{2}{x}} \rightarrow \frac{1 - 0 - 0}{1 - 0} = 1 > 0$$

から

$$y = x \cdot \frac{1 - \frac{3}{x} + \frac{3}{x^2}}{1 - \frac{2}{x}} \rightarrow -\infty$$

となります。

$x \rightarrow 2 + 0$ のとき

$$y = x - 1 + \frac{1}{x - 2}$$

において

$$x - 1 \rightarrow 1, \quad \frac{1}{x - 2} \rightarrow +\infty \quad \text{から} \quad y \rightarrow +\infty$$

$x \rightarrow 2 - 0$ のとき

$$y = x - 1 + \frac{1}{x - 2}$$

において

$$x - 1 \rightarrow 1, \quad \frac{1}{x - 2} \rightarrow -\infty \quad \text{から} \quad y \rightarrow -\infty$$

であることが分かります。さらに

$x > 2$ において

$$y - (x - 1) = \frac{1}{x - 2} > 0$$

で

$$y - (x - 1) \rightarrow 0 \quad (x \rightarrow +\infty)$$

$x < 2$ において

$$y - (x - 1) = \frac{1}{x - 2} < 0$$

で

$$y - (x - 1) \rightarrow 0 \quad (x \rightarrow +\infty)$$

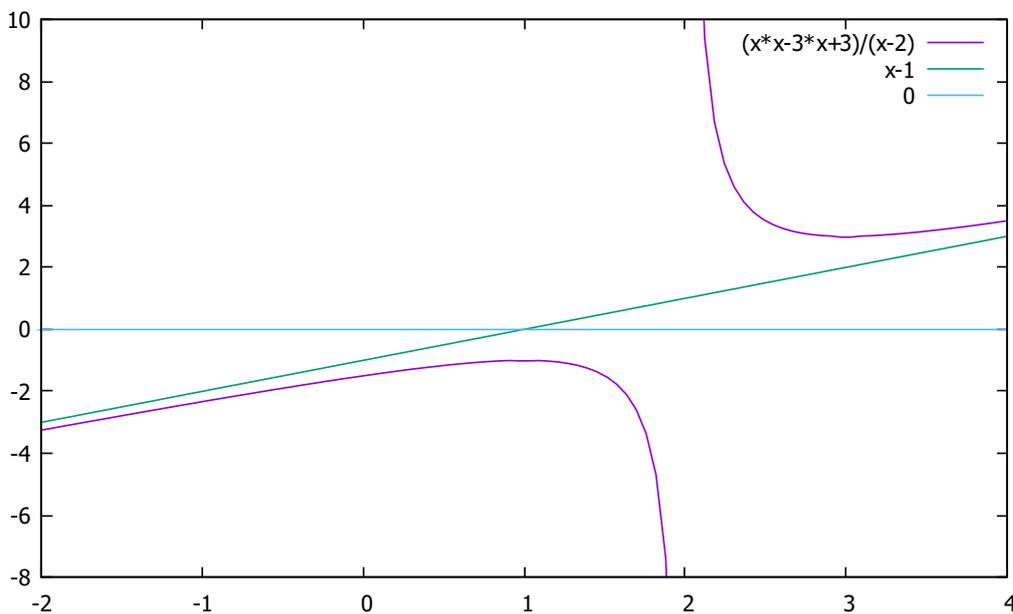
も分かります. 最後に

$$x^2 - 3x + 3 = \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} > 0$$

が常に成立しますから

$$y \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 2$$

が成立しますからグラフが求まります.



注意

$$y' = \frac{x^2 - 4x + 3}{(x - 2)^2} = \frac{(x - 2)^2 - 1}{(x - 2)^2} = 1 - \frac{1}{(x - 2)^2}$$

から

$$y'' = \frac{2}{(x - 2)^3}$$

となりますから

$$y'' \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 2$$

が分かります. これから凹凸を含めた増減表は

x		1		2		3	
y'	+	0	-	/	-	0	+
	-	-	-	/	+	+	+
y	↗	-1	↘	/	↖	3	↗

となります.

V 函数 $y = \frac{x^2-2x-1}{x-1}$ について考えます.

- (1) 導関数 y' を求めましょう.
 (2) $y = ax + b + \frac{c}{x-1}$ を満たす定数 a, b, c を求めましょう.
 (3) y の増減表を求めてグラフを求めましょう.

解答 (1)

$$\begin{aligned} y' &= \frac{(x^2-2x-1)'(x-1) - (x^2-2x-1)(x-1)'}{(x-1)^2} \\ &= \frac{(2x-2)(x-1) - (x^2-2x-1) \cdot 1}{(x-1)^2} \\ &= \frac{x^2-2x+3}{(x-1)^2} = \frac{(x-1)^2+2}{(x-1)^2} > 0 \end{aligned}$$

が分かります.

(2)

$$y = \frac{(x-1)^2-2}{x-1} = x-1 - \frac{2}{x-1}$$

(3) (1) から y' の符号は

$$y' > 0 \quad (x \neq 1)$$

となりますから、増減表は

x		1	
y'	+	/	+
y	↗	/	↗

となります。次に無限遠方と不連続点を与える $x = 1$ の近くでの漸近挙動について考えます。

$x \rightarrow \pm\infty$ のとき

$$y = x \cdot \frac{x^2-2x-1}{x(x-1)} = x \cdot \frac{1-\frac{2}{x}-\frac{1}{x^2}}{1-\frac{1}{x}}$$

において $x \rightarrow \pm\infty$ のとき

$$x \rightarrow \pm\infty, \quad \frac{1-\frac{3}{x}+\frac{3}{x^2}}{1-\frac{2}{x}} \rightarrow \frac{1-0-0}{1-0} = 1 > 0$$

から

$$y = x \cdot \frac{1-\frac{3}{x}+\frac{3}{x^2}}{1-\frac{2}{x}} \rightarrow \pm\infty \quad (\text{複号同順})$$

となります。

$x \rightarrow 1+0$ のとき

$$y = x-1 - \frac{2}{x-1}$$

において

$$x-1 \rightarrow 0, \quad -\frac{1}{x-2} \rightarrow -\infty \quad \text{から} \quad y \rightarrow -\infty$$

$x \rightarrow 1-0$ のとき

$$y = x-1 - \frac{2}{x-1}$$

において

$$x-1 \rightarrow 0, \quad -\frac{1}{x-2} \rightarrow +\infty \quad \text{から} \quad y \rightarrow +\infty$$

となります。

$x > 1$ において

$$y - (x-1) = -\frac{1}{x-1} < 0$$

で

$$y - (x-1) \rightarrow 0 \quad (x \rightarrow +\infty)$$

が分かります。他方

$x < 1$ において

$$y - (x-1) = -\frac{1}{x-1} > 0$$

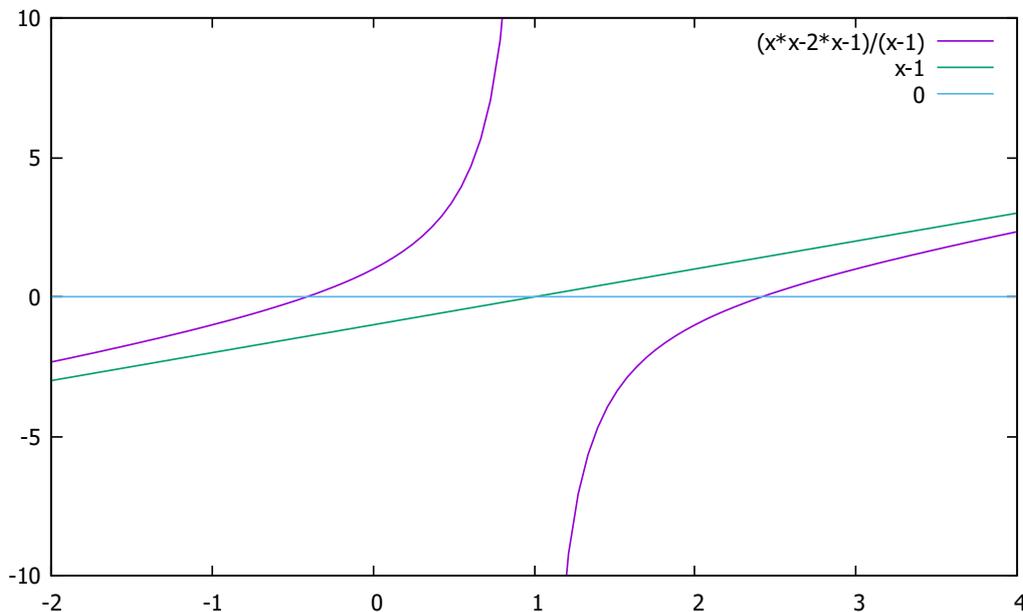
で

$$y - (x-1) \rightarrow 0 \quad (x \rightarrow -\infty)$$

も分かります。従って $x \rightarrow \pm\infty$ のとき $y = x-1$ に漸近することが分かります。最後に

$$y \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 1-\sqrt{2} < x < 1 & \text{OR} & x > 1+\sqrt{2} \\ x = 1 \pm \sqrt{2} \\ x < 1-\sqrt{2} & \text{OR} & 1 < x < 1+\sqrt{2} \end{cases}$$

に注意して次のグラフを得ます。



注意

が分かります。これから凹凸を含めた増減表は

$$y' = \frac{(x-1)^2 + 2}{(x-1)^2} = 1 + \frac{2}{(x-1)^2} = 1 - \frac{1}{(x-2)^2}$$

から

$$y'' = -\frac{4}{(x-1)^3}$$

となりますから

$$y'' \geq 0 \Leftrightarrow x \leq 1$$

となります。

x		1	
y'	+	/	+
y''	+	/	-
y	↗	/	↘

VI 函数 $y = \frac{x^2-x-2}{(x-1)(x-3)}$ について考えます。

(1) 導関数 y' を求めましょう。

(2) $y = a + \frac{b}{x-1} + \frac{c}{x-3}$ を満たす定数 a, b, c を求めましょう。

(3) y の増減表を求めてグラフを求めましょう。

解答 (1)

$$\begin{aligned} y' &= \frac{(x^2-x-2)'(x-1)(x-3) - (x^2-x-2)\{(x-1)(x-3)\}'}{(x-1)^2(x-3)^2} \\ &= \frac{(2x-1)(x-1)(x-3) - (2x-4)(x^2-x-2)}{(x-1)^2(x-3)^2} \\ &= \frac{-(3x^2-10x+11)}{(x-1)^2(x-3)^2} \end{aligned}$$

が分かります。ここで

$$3x^2 - 10x + 11 = 3\left(x - \frac{5}{3}\right)^2 + \frac{8}{3} > 0$$

から

$$y' > 0$$

が常に成立することが分かります.

(2)

$$y = \frac{x^2 - 4x + 3 + (3x - 5)}{(x - 1)(x - 3)} = 1 + \frac{3x - 5}{(x - 1)(x - 3)}$$

となります. さらに

$$\frac{b}{x - 1} + \frac{c}{x - 3} = \frac{b(x - 3) + c(x - 1)}{(x - 1)(x - 3)} = \frac{(b + c)x - (3b + c)}{(x - 1)(x - 3)} = \frac{3x - 5}{(x - 1)(x - 3)}$$

が成立するように

$$b + c = 3, \quad 3b + c = 5$$

となるように $b = 1, c = 2$ とすると

$$y = 1 + \frac{1}{x - 1} + \frac{2}{x - 3}$$

となります.

(3) (1) から y' の符号は

$$y' < 0 \quad (x \neq 1, 3)$$

となりますから, 増減表は

x		1		3	
y'	-	/	-	/	-
y	↗	/	↗	/	↗

となります. 次に無限遠方と不連続点を与える $x = 1, 3$ の近くでの漸近挙動について考えます.

$x \rightarrow \pm\infty$ のとき

$$y = 1 + \frac{1}{x - 1} + \frac{2}{x - 3}$$

において

$$\frac{1}{x - 1} \rightarrow 0, \quad \frac{2}{x - 3} \rightarrow 0$$

から

$$y = 1 + \frac{1}{x - 1} + \frac{2}{x - 3} \rightarrow 1 + 0 + 0 = 1$$

となります. ここで $x < 1$ において

$$\frac{1}{x - 1} < 0, \quad \frac{2}{x - 3} < 0$$

から

$$y = 1 + \frac{1}{x - 1} + \frac{2}{x - 3} < 1$$

が成立します. 他方 $x > 3$ において

$$\frac{1}{x - 1} > 0, \quad \frac{2}{x - 3} > 0$$

から

$$y = 1 + \frac{1}{x-1} + \frac{2}{x-3} > 1$$

が成立します.

$x \rightarrow 1 \pm 0$ のとき

$$y = 1 + \frac{1}{x-1} + \frac{2}{x-3}$$

において

$$\frac{1}{x-1} \rightarrow \pm\infty, \quad \frac{2}{x-3} \rightarrow -1$$

から

$$y = 1 + \frac{1}{x-1} + \frac{2}{x-3} \rightarrow \pm\infty \quad (\text{複号同順})$$

となります.

$x \rightarrow 3 \pm 0$ のとき

$$y = 1 + \frac{1}{x-1} + \frac{2}{x-3}$$

において

$$\frac{1}{x-1} \rightarrow \frac{1}{2}, \quad \frac{2}{x-3} \rightarrow \pm\infty$$

から

$$y = 1 + \frac{1}{x-1} + \frac{2}{x-3} \rightarrow \pm\infty \quad (\text{複号同順})$$

となります.

最後に

$$y = \frac{(x-2)(x+1)}{(x-3)(x-1)}$$

と変形して y の符号について

$$y \begin{matrix} \geq \\ \leq \end{matrix} 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x < -1 \quad \text{OR} \quad 1 < x < 2 \quad \text{OR} \quad x > 3 \\ x = -1, 2 \\ -1 < x < 1 \quad \text{OR} \quad 2 < x < 3 \end{cases}$$

に注意して次のグラフを得ます.

