

無限遠方の極限

Nobuyuki TOSE

Lec06, June 03, 2020 V01
2019 CalcNT V02+

$+\infty$ に発散する数列 (1)

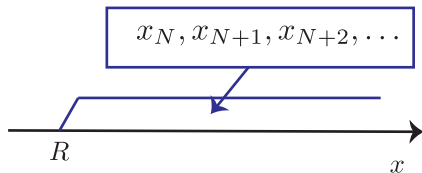
Definition

数列 $\{x_n\}$ が無限遠方に発散する：

$$x_n \rightarrow +\infty \quad (n \rightarrow +\infty)$$

とは、任意の $R > 1$ に対して番号 N が存在して

$$R < x_n \quad (n \geq N)$$



$+\infty$ に発散する数列(2)

Example 1 $x_n = n$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) とすると

$$x_n \rightarrow +\infty$$

$\forall R > 1$ を取ります. このとき

$$R - 1 < [R] \leq R$$

なので $N = [R] + 1$ とします. $n \geq N$ ならば

$$R < [R] + 1 = N \leq n$$

定理

定理 1

(1) $x_n \rightarrow +\infty, y_n \rightarrow +\infty$ ($n \rightarrow +\infty$) ならば

$$x_n + y_n \rightarrow +\infty \quad (n \rightarrow +\infty), \quad x_n y_n \rightarrow +\infty \quad (n \rightarrow +\infty)$$

(2) $x_n \rightarrow +\infty, y_n \rightarrow \alpha \in \mathbf{R}$ ($n \rightarrow +\infty$) ならば

$$x_n + y_n \rightarrow +\infty \quad (n \rightarrow +\infty)$$

さらに $\alpha > 0$ ならば

$$x_n y_n \rightarrow +\infty \quad (n \rightarrow +\infty)$$

(3) (押し出し) $x_n \rightarrow +\infty$ ($n \rightarrow +\infty$) で $x_n \leq y_n$ ($n \geq \exists N_0$) ならば

$$y_n \rightarrow +\infty \quad (n \rightarrow +\infty)$$

定理1 (証明を少し) (1)

定理1(1) $\forall R > 1$ を取ります. $x_n \rightarrow +\infty$ から

$$\exists N_1 (n \geq N_1 \Rightarrow 1 < R < x_n)$$

$y_n \rightarrow +\infty$ から

$$\exists N_2 (n \geq N_2 \Rightarrow 1 < R < y_n)$$

$N := \max(N_1, N_2)$ として $n \geq N$ ならば $n \geq N_1$ かつ $n \geq N_2$ なので

$$R < R + R < x_n + y_n, \quad R = 1 \cdot R < R \cdot R < x_n \cdot y_n$$

から

$$x_n + y_n \rightarrow +\infty, \quad x_n y_n \rightarrow +\infty \quad (n \rightarrow +\infty)$$

定理1 (証明を少し) (2)

定理1(2) (3) を使います. $y_n \rightarrow \alpha > 0$ なので, ある番号 N_0 が存在して

$$n \geq N_0 \Rightarrow \frac{\alpha}{2} < y_n < \frac{3\alpha}{2}$$

が成立します. 従って

$$\frac{\alpha}{2} \cdot x_n < x_n y_n \quad (n \geq N_0)$$

さらに $\alpha > 0$ から

$$\frac{\alpha}{2} \cdot x_n \rightarrow +\infty$$

も示せますから (示してみよう) (3) によって

$$x_n y_n \rightarrow +\infty$$

定理1 (証明を少し) (3)

定理 1(3) $\forall R > 1$ を取ります. $x_n \rightarrow +\infty$ から

$$\exists N_1 (n \geq N_1 \Rightarrow R < x_n)$$

が成立します. $N = \max(N_0, N_1)$ に対して $n \geq N_0$ かつ $n \geq N_1$ から

$$R < x_n \leq y_n$$

となります.

定理1に対するコメント

Example 2 定理1の(1)から

$$n^2 \rightarrow +\infty \quad (n \rightarrow +\infty)$$

Example 3 $a_n = n^2 - n$ とする. これを $a_n = n^2 \left(1 - \frac{1}{n}\right)$ と変形すると

$$a_n = n^2 \left(1 - \frac{1}{n}\right) \rightarrow +\infty$$

実際 $n^2 \rightarrow +\infty$ と $1 - \frac{1}{n} \rightarrow 1 > 0$ から定理1の(2)が適用できる.

Remark The Part (3) is called PUSH OUT Theorem in Japan. It means OSHIDASHI, a winning trick of the Sumou.

定理1に対するコメント (2)

Example 4 $a > 1$ ならば

$$a^n \rightarrow +\infty \quad (n \rightarrow +\infty)$$

実際 $a = 1 + \theta$ とすると $\theta > 0$ であり, 2項定理から

$$a^n = (1 + \theta)^n = 1 + n\theta + \frac{n(n-1)}{2} \cdot \theta^2 + \dots + \theta^n > \theta n$$

が従う. 他方 $\theta \cdot n \rightarrow +\infty$ であるので, 定理1(3) から $a^n \rightarrow +\infty$.

定理 2

定理 2

(1) すべての番号 n に対して $x_n \neq 0$ で, $x_n \rightarrow +\infty$ ($n \rightarrow +\infty$) ならば

$$\frac{1}{x_n} \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow +\infty)$$

(2) $a_n > 0$ が任意の n に対して成立して, $a_n \rightarrow 0$ ならば

$$\frac{1}{a_n} \rightarrow +\infty$$

定理 2(1)-証明

$\forall \varepsilon > 0$ を取ります. そして $R := \frac{1}{\varepsilon} > 0$ とします. このとき $x_n \rightarrow +\infty$ から

$$\exists N (n \geq N \Rightarrow R < x_n)$$

これから $n \geq N$ ならば

$$0 < \frac{1}{x_n} < \frac{1}{R} = \varepsilon$$

であることが分かります.

(2) も同様です. 任意の $R > 1$ に対して $\varepsilon = \frac{1}{R}$ と定めます.

無限遠方の極限 (1)

無限遠方の極限 (1)

$g: (A, +\infty) \rightarrow \mathbf{R}$

(1)

$$g(x) \rightarrow \alpha \in \mathbf{R} \quad (x \rightarrow +\infty)$$

とは条件

$$x_n \in (A, +\infty), \quad x_n \rightarrow +\infty \quad (n \rightarrow +\infty)$$

を満たす数列 $\{x_n\}$ が必ず

$$g(x_n) \rightarrow \alpha \quad (n \rightarrow +\infty)$$

を満たすときである.

無限遠方の極限 (2)

無限遠方の極限 (2)

(2)

$$g(x) \rightarrow +\infty \quad (x \rightarrow +\infty)$$

とは条件

$$x_n \in (A, +\infty), \quad x_n \rightarrow +\infty \quad (n \rightarrow +\infty)$$

を満たす数列 $\{x_n\}$ が必ず

$$g(x_n) \rightarrow +\infty \quad (n \rightarrow +\infty)$$

を満たすときである。

同値な定義 (Equivalent Definitions)

(1) $g(x) \rightarrow \alpha \in \mathbf{R}$ ($x \rightarrow +\infty$) if and only if for any $\varepsilon > 0$, we can find $R > 0$ satisfying

$$\alpha - \varepsilon < g(t) < \alpha + \varepsilon \quad (t > R)$$

(2) $g(x) \rightarrow +\infty$ ($x \rightarrow +\infty$) if and only if for any $R > 1$, we can find $R_0 > 0$ satisfying

$$R < g(t) \quad (R_0 < t)$$

Examples

Example 5 We consider

$$g(x) = \frac{1}{x} \quad (x > 0)$$

Then

$$g(x) \rightarrow 0 \quad (x \rightarrow +\infty)$$

Take a sequence $\{x_n\}$ satisfying

$$x_n > 0, \quad x_n \rightarrow +\infty$$

Then it follows from Theorem 2 that

$$g(x_n) = \frac{1}{x_n} \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow +\infty)$$

Theorem 3

Theorem 3

2つの関数

$$f(x) : (A, +\infty) \rightarrow \mathbf{R}, \quad g(x) : (A, +\infty) \rightarrow \mathbf{R}$$

が $x \rightarrow +\infty$ のとき

$$f(x) \rightarrow \alpha \in \mathbf{R}, \quad g(x) \rightarrow \beta \in \mathbf{R}$$

を満たすとする.

(1) $f(x) \pm g(x) \rightarrow \alpha \pm \beta$ ($x \rightarrow +\infty$)

(2) $f(x)g(x) \rightarrow \alpha\beta$ ($x \rightarrow +\infty$)

(3) $g(x) \neq 0$ ($x > A$) で $\beta \neq 0$ とすると

$$\frac{f(x)}{g(x)} \rightarrow \frac{\alpha}{\beta} \quad (x \rightarrow +\infty)$$