Lec 04, 2020 年 5 月 27 日演習問題解答

I 以下の関数 $f(x)$ に対して導関数 $f'(x)$ を求めましょう．ただし

$$(x^n)' = nx^{n-1} \qquad (n = 1, 2, 3, \dots) \tag{10}$$

$$\left(\frac{1}{x^n}\right)' = -\frac{n}{x^{n+1}} \qquad (n = 1, 2, 3, \dots) \tag{11}$$

$$(\sqrt{x})' = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{x}} \tag{12}$$

は用いましょう．

(1) $f(x) = \frac{1}{x+2}$ **(2)** $f(x) = \frac{x+3}{x-1}$ **(3)** $f(x) = \frac{1}{2x+1}$ **(4)** $f(x) = \frac{x}{2x-1}$
(5) $f(x) = \frac{1}{x^2+1}$ **(6)** $f(x) = \frac{x+1}{x^2+1}$ **(7)** $f(x) = \frac{x^2}{x-1}$ **(8)** $f(x) = x^2\sqrt{x}$
(9) $f(x) = \frac{1}{x\sqrt{x}}$ **(10)** $f(x) = \frac{1}{x^2\sqrt{x}}$ **(11)** $f(x) = \frac{x^2}{x^2+1}$ **(12)** $f(x) = \frac{x}{x^2+x+1}$

解答

(1)

$$f'(x) = -\frac{1}{(x+2)^2}$$

(2)

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{(x+3)'(x-1) - (x+3)(x-1)'}{(x-1)^2} \\ &= \frac{1 \cdot (x-1) - (x+3) \cdot 1}{(x-1)^2} = -\frac{4}{(x-1)^2} \end{aligned}$$

(3)

$$f'(x) = -\frac{(2x+1)'}{(2x+1)^2} = -\frac{2}{(2x+1)^2}$$

(4)

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{(x)'(2x-1) - x(2x-1)'}{(2x-1)^2} \\ &= \frac{1 \cdot (2x-1) - x \cdot 2}{(x-1)^2} = -\frac{1}{(2x-1)^2} \end{aligned}$$

(5)

$$f'(x) = -\frac{(x^2+1)'}{(x^2+1)^2} = -\frac{2x}{(x^2+1)^2}$$

(6)

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{(x+1)'(x^2+1) - (x+1)(x^2+1)'}{(x^2+1)^2} \\ &= \frac{1 \cdot (x^2+1) - (x+1) \cdot 2x}{(x^2+1)^2} = \frac{1 - 2x - x^2}{(x^2+1)^2} \end{aligned}$$

(7)

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{(x^2)'(x-1) - x^2(x-1)'}{(x-1)^2} \\
&= \frac{2x \cdot (x-1) - x^2 \cdot 1}{(x-1)^2} = \frac{x^2-2x}{(x-1)^2}
\end{aligned}
$$

(8)

$$
f'(x) = (x^2)'\sqrt{x} + x^2\left(\sqrt{x}\right)' = 2x\sqrt{x} + x^2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{5}{2} \cdot x\sqrt{x}
$$

(9)

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= -\frac{(x\sqrt{x})'}{(x\sqrt{x})^2} = -\frac{(x)'\sqrt{x} + x \cdot (\sqrt{x})'}{x^3} = -\frac{1 \cdot \sqrt{x} + x \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{x}}}{x^3} \\
&= -\frac{\frac{3}{2} \cdot \sqrt{x}}{x^3} = -\frac{3}{2} \cdot \frac{1}{x^2\sqrt{x}}
\end{aligned}
$$

(10)

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= -\frac{(x^2\sqrt{x})'}{(x^2\sqrt{x})^2} = -\frac{(x^2)'\sqrt{x} + x^2 \cdot (\sqrt{x})'}{x^5} = -\frac{2x \cdot \sqrt{x} + x^2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{x}}}{x^5} \\
&= -\frac{\frac{5}{2} \cdot x\sqrt{x}}{x^5} = -\frac{5}{2} \cdot \frac{1}{x^3\sqrt{x}}
\end{aligned}
$$

(11)

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{(x^2)'(x^2+1) - x^2(x^2+1)'}{(x^2+1)^2} \\
&= \frac{2x \cdot (x^2+1) - x^2 \cdot 2x}{(x^2+1)^2} = \frac{2x}{(x^2+1)^2}
\end{aligned}
$$

(12)

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{(x)'(x^2+x+1) - x(x^2+x+1)'}{(x^2+x+1)^2} \\
&= \frac{1 \cdot (x^2+x+1) - x(2x+1)}{(x^2+x+1)^2} \\
&= \frac{-x^2+1}{(x^2+x+1)^2}
\end{aligned}
$$

II 以下の関数 $f(x)$ に対して導関数 $f'(x)$ を求めましょう.
(1) $f(x) = \frac{1}{(3x+1)^3}$ **(2)** $f(x) = (1-2x)^5$ **(3)** $f(x) = \left(\frac{x-1}{x}\right)^5$
(4) $f(x) = \left(3-2x^2\right)^3$ **(5)** $f(x) = \sqrt{x-1}$ **(6)** $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x-1}}$
(7) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2+x+1}}$ **(8)** $f(x) = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$ **(9)** $f(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$

(1) y が $y = \frac{1}{u^3}$ と $u = 3x+1$ の合成関数と考えると

$$
\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = -\frac{3}{u^4} \cdot 3 = -\frac{9}{(3x+1)^4}
$$

となります。

(2) y が $y = u^5$ と $u = 1 - 2x$ の合成函数と考えると

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = 5u^4 \cdot (-2) = -10(1-2x)^4$$

となります。

(3) y が $y = u^5$ と $u = \frac{x-1}{x} = 1 - \frac{1}{x}$ の合成函数と考えると

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = 5u^4 \cdot \frac{1}{x^2} = 5\frac{(x-1)^4}{x^6}$$

となります。

(4) y が $y = u^3$ と $u = 3 - 2x^2$ の合成函数と考えると

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = 3u^2 \cdot (-4x) = -12x(3-2x^2)^2$$

となります。

(5) y が $y = \sqrt{u}$ と $u = x - 1$ の合成函数と考えると

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{u}} \cdot 1 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{x-1}}$$

(6) y が $y = \frac{1}{\sqrt{u}}$ と $u = x - 1$ の合成函数と考えると

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{u\sqrt{u}} \cdot 1 = -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{(x-1)\sqrt{x-1}}$$

(7) y が $y = \frac{1}{\sqrt{u}}$ と $u = 1 + x + x^2$ の合成函数と考えると

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{u\sqrt{u}} \cdot (1+2x) = -\frac{1}{2} \cdot \frac{1+2x}{(1+x+x^2)\sqrt{1+x+x^2}}$$

(8) まず $y = \sqrt{1-x^2}$ に対して $\dfrac{dy}{dx}$ を求めます．そのために y を $y = \sqrt{u}$ と $u = 1 - x^2$ の合成関数とみなします．すると

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{u}} \cdot (-2x) = -\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$$

となります．さらに

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{(x)'\sqrt{1-x^2} - x\left(\sqrt{1-x^2}\right)'}{(\sqrt{1-x^2})^2} = \frac{1 \cdot \sqrt{1-x^2} - x\left(-\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right)}{1-x^2} \\ &= \frac{(1-x^2)+x^2}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}} = \frac{1}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}} \end{aligned}$$

(9) まず $y = \sqrt{1+x^2}$ に対して $\dfrac{dy}{dx}$ を求めます．そのために y を $y = \sqrt{u}$ と $u = 1 + x^2$ の合成関数とみなします．すると

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{u}} \cdot (2x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$$

となります．さらに

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{(x)'\sqrt{1+x^2} - x\left(\sqrt{1+x^2}\right)'}{(\sqrt{1+x^2})^2} = \frac{1\cdot\sqrt{1+x^2} - x\cdot\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}}{1+x^2} \\ &= \frac{(1+x^2)-x^2}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}} = \frac{1}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}} \end{aligned}$$

参考　(8) のグラフは以下のようになります．（省略）

(9) のグラフは以下のようになります．（省略）

III 函数 $f(x)$ が $x=c$ で微分可能であるとします．すなわち，極限

$$\lim_{x\to c}\frac{f(x)-f(c)}{x-c}$$

が存在するとします．このとき以下の極限を求めましょう．

(1)

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(c+h^2)-f(c)}{h}$$

(2)

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(c+ph)-f(c+qh)}{h}$$

解答　**(1)** $x=c+h^2$ とすると $h\to 0$ のとき $x\to c$ となります．このとき

$$\frac{f(c+h^2)-f(c)}{h} = \frac{f(x)-f(c)}{h^2}\cdot h = \frac{f(x)-f(c)}{x-c}\cdot h \to f'(c)\cdot 0 = 0$$

となります．

(2)

$$\begin{aligned} \frac{f(c+ph)-f(c+qh)}{h} &= \frac{(f(c+ph)-f(c))-(f(c+qh)-f(c))}{h} \\ &= \frac{(f(c+ph)-f(c))}{h} - \frac{(f(c+qh)-f(c))}{h} \\ &= p\cdot\frac{(f(c+ph)-f(c))}{ph} - q\cdot\frac{(f(c+qh)-f(c))}{qh} \end{aligned}$$

となります．ここで $x=c+ph$ とすると $h\to 0$ のとき $x\to c$ となります．そして

$$\frac{f(c+ph)-f(c)}{ph} = \frac{f(x)-f(c)}{x-c} \to f'(c)$$

となります．同様に

$$\frac{f(c+qh)-f(c)}{qh} \to f'(c)$$

も示せます．以上から

$$p\cdot\frac{(f(c+ph)-f(c))}{ph} - q\cdot\frac{(f(c+qh)-f(c))}{qh} \to p\cdot f'(c) - q\cdot f'(c) = (p-q)f'(c)$$

となります.

IV 以下の極限が存在するとします.

$$\lim_{x \to 1} \frac{ax^2 + bx}{x - 1} = 1$$

このとき a, b を求めましょう.

解答 $x \to 1$ のとき

$$ax^2 + bx = \frac{ax^2 + bx}{x - 1} \cdot (x - 1) \to 1 \cdot 0 = 0$$

となります. 他方,

$$ax^2 + bx \to a \cdot 1^2 + b \cdot 1 = a + b$$

したがって $a + b = 0$ であることが分かります. ここで $b = -a$ を用いると $x \to 1$ のとき

$$\frac{ax^2 + bx}{x - 1} = \frac{ax^2 - ax}{x - 1} = a \cdot \frac{x^2 - x}{x - 1} = a \cdot x \to a$$

となります. よって $a = 1$ であることが従います. 以上で $a = 1, b = -1$ であることが示されました.

V 以下の極限が存在するとします.

$$\lim_{x \to 1} \frac{a\sqrt{x + 1} - b}{x - 1} = \sqrt{2}$$

このとき a, b を求めましょう.

解答

$$a\sqrt{x + 1} - b = \frac{a\sqrt{x + 1} - b}{x - 1} \cdot (x - 1) \to \sqrt{2} \cdot 0 = 0$$

となります. 他方,

$$a\sqrt{x + 1} - b \to a \cdot \sqrt{2} - b = a\sqrt{2} - b$$

したがって $a\sqrt{2} - b = 0$ であることが分かります. ここで $b = a\sqrt{2}$ を用いると $x \to 1$ のとき

$$\begin{aligned}\frac{a\sqrt{x + 1} - b}{x - 1} &= \frac{a\sqrt{x + 1} - a\sqrt{2}}{x - 1} = a \cdot \frac{\sqrt{x + 1} - \sqrt{2}}{x - 1} = a \cdot \frac{x - 1}{(\sqrt{x + 1} + \sqrt{2})(x - 1)} \\ &= a \cdot \frac{1}{(\sqrt{x + 1} + \sqrt{2})} \to a \cdot \frac{1}{2\sqrt{2}} = \sqrt{2}\end{aligned}$$

となります. よって $a = 4$ であることが従います. 以上で $a = 4, b = 4\sqrt{2}$ であることが示されました.

補充問題 次の函数 $y = f(x)$ に対して導関数 $\dfrac{dy}{dx} = f'(x)$ を求めましょう。
(1) $f(x) = \frac{x}{x^2+x+1}$ **(2)** $f(x) = \frac{1}{(3x+1)^3}$ **(3)** $f(x) = (1-2x)^5$
(4) $f(x) = \frac{1}{(3x-2)^5}$ **(5)** $f(x) = \left(\frac{x-1}{x}\right)^5$ **(6)** $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x+x^2}}$
(7) $f(x) = (3-2x^2)^3$ **(8)** $f(x) = \frac{x^2}{x^2+1}$

解答 **(1)**

$$\begin{aligned}\left(\frac{x}{x^2+x+1}\right)' &= \frac{(x)'(x^2+x+1) - x\cdot(x^2+x+1)'}{(x^2+x+1)^2} \\ &= \frac{x^2+x+1-x\cdot(2x+1)}{(x^2+1)^2} \\ &= \frac{1-x^2}{(x^2+1)^2}\end{aligned}$$

(2) y が $y = \frac{1}{u^3}$ と $u = 3x+1$ の合成関数と考えると

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx} = -\frac{3}{u^4}\cdot 3 = -\frac{9}{(3x+1)^4}$$

となります。
(3) y が $y = u^5$ と $u = 1-2x$ の合成函数と考えると

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx} = 5u^4\cdot(-2) = -10(1-2x)^4$$

となります。
(4) y が $y = \frac{1}{u^5}$ と $u = 3x-2$ の合成関数と考えると

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx} = -\frac{5}{u^6}\cdot 3 = -\frac{15}{(3x-2)^6}$$

となります。
(5) y が $y = u^5$ と $u = \frac{x-1}{x} = 1 - \frac{1}{x}$ の合成函数と考えると

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx} = 5u^4\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\right) = -5\frac{(x-1)^4}{x^6}$$

となります。
(6) y が $y = \frac{1}{\sqrt{u}}$ と $u = 1+x+x^2$ の合成函数と考えると

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= \frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx} \\ &= \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{u}}\cdot(1+2x) \\ &= \frac{1}{2}\cdot\frac{1+2x}{\sqrt{1+x+x^2}}\end{aligned}$$

(7) y が $y = u^3$ と $u = 3 - 2x^2$ の合成函数と考えると

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} \\ &= 3u^2 \cdot (-4x) = -12x(3-2x^2)^2\end{aligned}$$

となります。

(8)

$$\begin{aligned}f'(x) &= \frac{(x^2)'(1+x^2) - x^2(1+x^2)'}{(1+x^2)^2} \\ &= \frac{2x(1+x^2) - x^2 \cdot 2x}{(1+x^2)^2} \\ &= \frac{2x}{(1+x^2)^2}\end{aligned}$$

補充問題 函数 $f(x) = \frac{x}{1+x^2}$ に対して $f'(x) > 0,\ f'(x) = 0,\ f'(x) < 0$ である x を求めましょう.