

Lec 03, 2020年5月20日演習問題解答

I 実数 $r \in \mathbb{R}$ が $r \neq -1$ を満たすとき、極限

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1 - r^n}{1 + r^n}$$

を求めましょう。

解答 (i) $-1 < r < 1$ のとき $r^n \rightarrow 0$ ($n \rightarrow +\infty$) が成立しますから

$$\frac{1 + r^n}{1 + r^n} \rightarrow \frac{1 - 0}{1 + 0} = 1$$

(ii) $r = 1$ のとき

$$\frac{1 - r^n}{1 + r^n} = \frac{0}{2} = 0 \rightarrow 0$$

(iii) $r < -1$ または $r > 1$ のとき、 $|\frac{1}{r}| < 1$ に注意すると $(\frac{1}{r})^n = \frac{1}{r^n} \rightarrow 0$ ($n \rightarrow +\infty$) が分かりますから

$$\frac{1 - r^n}{1 + r^n} = \frac{\frac{1}{r^n} - 1}{\frac{1}{r^n} + 1} \rightarrow \frac{0 - 1}{0 + 1} = -1$$

II 実数 $r \in \mathbb{R}$ が $r > 0$ を満たすとき、極限

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1 - nr^n}{1 + nr^n}$$

を求めましょう。

解答 (i) $0 < r < 1$ のとき $nr^n \rightarrow 0$ ($n \rightarrow +\infty$) が成立しますから

$$\frac{1 - nr^n}{1 + nr^n} \rightarrow \frac{1 - 0}{1 + 0} = 1$$

(ii) $r = 1$ のとき

$$\frac{1 - nr^n}{1 + nr^n} = \frac{1 - n}{1 + n} = \frac{\frac{1}{n} - 1}{\frac{1}{n} + 1} \rightarrow \frac{0 - 1}{0 + 1} = -1$$

(iii) $r > 1$ のとき $|\frac{1}{r}| < 1$ から $(\frac{1}{r})^n = \frac{1}{r^n} \rightarrow 0$ ($n \rightarrow +\infty$) が成立しますから

$$\frac{1 - nr^n}{1 + nr^n} = \frac{\frac{1}{n} \cdot \frac{1}{r^n} - 1}{\frac{1}{n} \cdot \frac{1}{r^n} + 1} \rightarrow \frac{0 \cdot 0 - 1}{0 \cdot 0 + 1} = -1$$

III 次の関数 $f(x)$ に対して極限

$$\lim_{x \rightarrow \alpha} \frac{f(x) - f(\alpha)}{x - \alpha}$$

を求めましょう。

(1) $f(x) = \frac{1}{x^2}$ (但し $\alpha \neq 0$) (2) $f(x) = \frac{1}{x^2}$ (但し $\alpha \neq 0$)

(3) $f(x) = \sqrt{x}$ (但し $\alpha > 0$) (4) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ (但し $\alpha > 0$)

(5) $f(x) = \frac{1}{2x+1}$ (但し $\alpha \neq -\frac{1}{2}$) (6) $f(x) = \frac{1}{x+2}$ (但し $\alpha \neq -2$)

(7) $f(x) = \frac{1}{(x+1)^2}$ (但し $\alpha \neq -1$) (8) $f(x) = \sqrt{1+x^2}$ (9) $f(x) = \frac{1}{x^2+x+1}$

(1) $x \neq \alpha$ とします。

$$\begin{aligned} \frac{f(x) - f(\alpha)}{x - \alpha} &= \frac{\frac{1}{x^2} - \frac{1}{\alpha^2}}{x - \alpha} \\ &= \frac{\alpha^2 - x^2}{x^2 \alpha^2 (x - \alpha)} \\ &= -\frac{x + \alpha}{x^2 \alpha^2} \rightarrow -\frac{\alpha + \alpha}{\alpha^2 \cdot \alpha^2} = -\frac{2}{\alpha^3} \quad (x \rightarrow \alpha) \end{aligned}$$

注意

$$f'(\alpha) = -\frac{2}{\alpha^3}$$

が分かります。

(2) $x \neq \alpha$ とします。

$$\begin{aligned} \frac{f(x) - f(\alpha)}{x - \alpha} &= \frac{\frac{1}{x^3} - \frac{1}{\alpha^3}}{x - \alpha} \\ &= \frac{\alpha^3 - x^3}{x^3 \alpha^3 (x - \alpha)} \\ &= -\frac{x^2 + \alpha x + \alpha^2}{x^3 \alpha^3} \rightarrow -\frac{\alpha^2 + \alpha \alpha + \alpha^2}{\alpha^3 \cdot \alpha^3} = -\frac{3}{\alpha^4} \quad (x \rightarrow \alpha) \end{aligned}$$

注意

$$f'(\alpha) = -\frac{3}{\alpha^4}$$

が分かります。

(3) $x \neq \alpha$ とします。

$$\begin{aligned} \frac{f(x) - f(\alpha)}{x - \alpha} &= \frac{\sqrt{x} - \sqrt{\alpha}}{x - \alpha} \\ &= \frac{x - \alpha}{(\sqrt{x} + \sqrt{\alpha})(x - \alpha)} \\ &= \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{\alpha}} \rightarrow \frac{1}{\sqrt{\alpha} + \sqrt{\alpha}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{\alpha}} \end{aligned}$$

注意

$$f'(\alpha) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{\alpha}}$$

が分かります。

(4) $x \neq \alpha$ とします。

$$\begin{aligned}\frac{f(x) - f(\alpha)}{x - \alpha} &= \frac{\frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{\sqrt{\alpha}}}{x - \alpha} = \frac{\frac{\sqrt{\alpha} - \sqrt{x}}{\sqrt{\alpha} \cdot \sqrt{x}}}{x - \alpha} = -\frac{\sqrt{x} - \sqrt{\alpha}}{\sqrt{\alpha} \cdot \sqrt{x} \cdot (x - \alpha)} \\ &= -\frac{x - \alpha}{\sqrt{\alpha} \cdot \sqrt{x} \cdot (\sqrt{x} + \sqrt{\alpha})(x - \alpha)} \\ &= -\frac{1}{\sqrt{\alpha} \cdot \sqrt{x} \cdot (\sqrt{x} + \sqrt{\alpha})} \rightarrow -\frac{1}{\sqrt{\alpha} \cdot \sqrt{\alpha} \cdot (\sqrt{\alpha} + \sqrt{\alpha})} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\alpha\sqrt{\alpha}}\end{aligned}$$

注意

$$f'(\alpha) = -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\alpha\sqrt{\alpha}}$$

が分かります。

(5) $x \neq \alpha$ とします。

$$\begin{aligned}\frac{\frac{1}{2x+1} - \frac{1}{2\alpha+1}}{x - \alpha} &= \frac{(2\alpha + 1) - (2x + 1)}{(2x + 1)(2\alpha + 1)(x - \alpha)} \\ &= -\frac{2}{2\alpha + 1} \cdot \frac{1}{2x + 1} \\ &\rightarrow -\frac{2}{2\alpha + 1} \cdot \frac{1}{2\alpha + 1} = -\frac{2}{(2\alpha + 1)^2} \quad (x \rightarrow \alpha)\end{aligned}$$

注意

$$f'(\alpha) = -\frac{2}{(2\alpha + 1)^2}$$

を得ます。

(6) $x \neq \alpha$ とします。

$$\begin{aligned}\frac{\frac{1}{x+2} - \frac{1}{\alpha+2}}{x - \alpha} &= \frac{(\alpha + 2) - (x + 2)}{(x + 2)(\alpha + 2)(x - \alpha)} \\ &= -\frac{1}{\alpha + 2} \cdot \frac{1}{x + 2} \\ &\rightarrow -\frac{1}{\alpha + 2} \cdot \frac{1}{\alpha + 2} = -\frac{1}{(\alpha + 2)^2} \quad (x \rightarrow \alpha)\end{aligned}$$

注意

$$f'(\alpha) = -\frac{1}{(\alpha + 2)^2}$$

を得ます。

(7) $x \neq \alpha$ とします。

$$\begin{aligned}\frac{\frac{1}{(x+1)^2} - \frac{1}{(\alpha+1)^2}}{x - \alpha} &= -\frac{(x + 1)^2 - (\alpha + 1)^2}{(x + 1)^2(\alpha + 1)^2(x - \alpha)} \\ &= -\frac{(x - \alpha)(x + \alpha + 2)}{(x + 1)^2(\alpha + 1)^2(x - \alpha)} \\ &= -\frac{(x + \alpha + 2)}{(x + 1)^2(\alpha + 1)^2} \\ &\rightarrow -\frac{(\alpha + \alpha + 2)}{(\alpha + 1)^2(\alpha + 1)^2} = -\frac{2}{(\alpha + 1)^3} \quad (x \rightarrow \alpha)\end{aligned}$$

注意

$$f'(\alpha) = -\frac{2}{(\alpha+1)^3}$$

を得ます。

(8) $x \neq \alpha$ とします。

$$\begin{aligned}\frac{\sqrt{1+x^2} - \sqrt{1+\alpha^2}}{x-\alpha} &= \frac{(1+x^2) - (1+\alpha^2)}{(x-\alpha)(\sqrt{1+x^2} + \sqrt{1+\alpha^2})} \\ &= \frac{x+\alpha}{\sqrt{1+x^2} + \sqrt{1+\alpha^2}}\end{aligned}$$

となります。

$$\sqrt{y} \rightarrow \sqrt{\beta} \quad (y \rightarrow \beta)$$

が成立しますから、 $x \rightarrow \alpha$ のとき $1+x^2 \rightarrow 1+\alpha^2$ から

$$\sqrt{1+x^2} \rightarrow \sqrt{1+\alpha^2}$$

が従います。よって

$$\frac{x+\alpha}{\sqrt{1+x^2} + \sqrt{1+\alpha^2}} \rightarrow \frac{\alpha+\alpha}{\sqrt{1+\alpha^2} + \sqrt{1+\alpha^2}} = \frac{\alpha}{\sqrt{1+\alpha^2}}$$

から

$$f'(\alpha) = \frac{\alpha}{\sqrt{1+\alpha^2}}$$

を得ます。

(9) $x \neq \alpha$ とします。

$$\begin{aligned}\frac{\frac{1}{x^2+x+1} - \frac{1}{\alpha^2+\alpha+1}}{x-\alpha} &= \frac{(\alpha^2+\alpha+1) - (x^2+x+1)}{(x^2+x+1)(\alpha^2+\alpha+1)(x-\alpha)} \\ &= \frac{-(x+\alpha)-1}{x^2+x+1} \cdot \frac{1}{\alpha^2+\alpha+1} \\ &\rightarrow \frac{-(\alpha+\alpha)-1}{\alpha^2+\alpha+1} \cdot \frac{1}{\alpha^2+\alpha+1} = -\frac{2\alpha+1}{(\alpha^2+\alpha+1)^2}\end{aligned}$$

から

$$f'(\alpha) = -\frac{2\alpha+1}{(\alpha^2+\alpha+1)^2}$$

を得ます。

を得ます。

IV 次の1次分数関数のグラフを描きましょう。

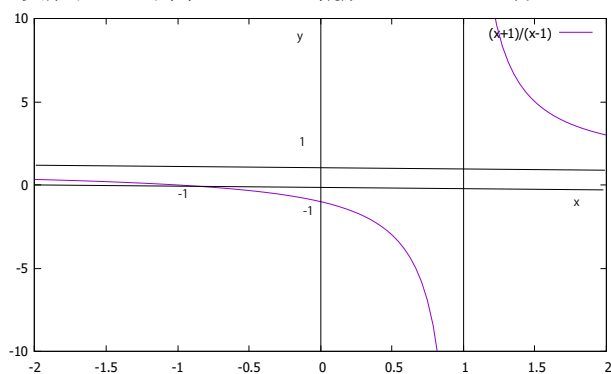
(1) $y = \frac{x+1}{x-1}$ (2) $y = \frac{2x+1}{x+1}$ (3) $y = \frac{3x+1}{x+1}$ (4) $y = \frac{3x+4}{x+1}$

解答

(1)

$$y = \frac{x+1}{x-1} = \frac{x-1+2}{x-1} = 1 + \frac{2}{x-1}$$

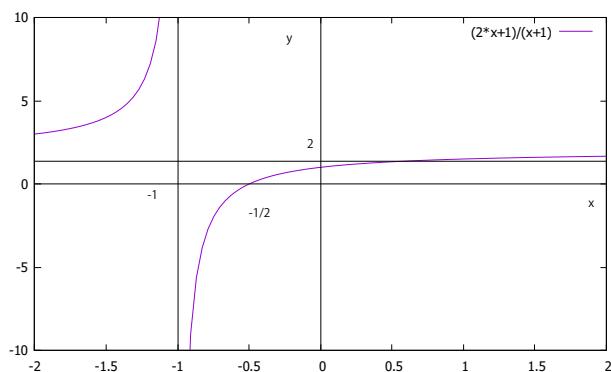
と変形すれば下図がグラフの概形であることが分かります。



(2)

$$y = \frac{2x+1}{x+1} = \frac{2(x+1)-1}{x+1} = 2 - \frac{1}{x+1}$$

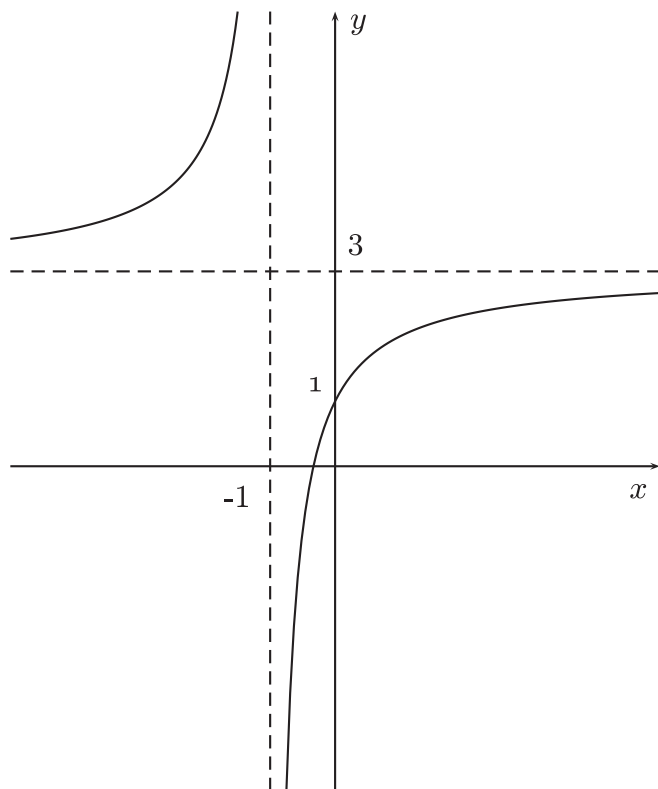
と変形すれば下図がグラフの概形であることが分かります。



(3)

$$y = \frac{3x+1}{x+1} = 3 - \frac{2}{x+1}$$

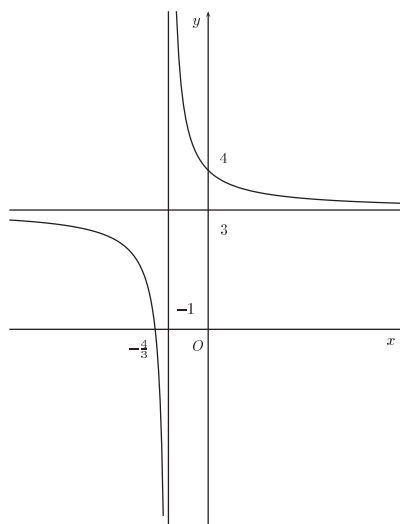
と変形すれば下図がグラフの概形であることが分かります。



(4)

$$y = \frac{3x + 4}{x + 1} = 3 + \frac{1}{x + 1}$$

と変形すれば右図がグラフの概形
であることが分かります。



補充問題 不等式

$$\frac{2}{x-2} - \frac{2}{x} > 1$$

を解きましょう。

解答

$$\begin{aligned}\frac{2}{x-2} - \frac{2}{x} - 1 &= -\frac{x^2 - 2x - 4}{x(x-2)} \\ &= -\frac{(x - (1 - \sqrt{5}))(x - (1 + \sqrt{5}))}{x(x-2)}\end{aligned}$$

から

$$\begin{aligned}\frac{2}{x-2} - \frac{2}{x} - 1 > 0 &\Leftrightarrow \frac{(x - (1 - \sqrt{5}))(x - (1 + \sqrt{5}))}{x(x-2)} < 0 \\ &\Leftrightarrow \left((x - (1 - \sqrt{5}))(x - (1 + \sqrt{5})) > 0 \text{ AND } x(x-2) < 0 \right) \\ &\quad \text{OR } \left((x - (1 - \sqrt{5}))(x - (1 + \sqrt{5})) < 0 \text{ AND } x(x-2) > 0 \right) \\ &\Leftrightarrow \text{FALSE OR} \\ &\quad \left(1 - \sqrt{5} < x < 0 \text{ OR } 2 < x < 1 + \sqrt{5} \right) \\ &\Leftrightarrow 1 - \sqrt{5} < x < 0 \text{ OR } 2 < x < 1 + \sqrt{5}\end{aligned}$$