**2020 年 L02 05 月 13 日演習問題解答**

**I** 以下の和を求めましょう。

**(1)** $S_n := 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^3} + \cdots + \frac{1}{3^n}$

**(2)** $T_n := 1 + 2\cdot\frac{1}{2} + 3\cdot\frac{1}{2^2} + \cdots + n\cdot\frac{1}{2^{n-1}}$

**Hint:**

$$\begin{array}{rrcccccc} & T_n & = & 1+ & 2\cdot\frac{1}{2} & +3\cdot\frac{1}{2^2} & +\ldots \\ -) & \frac{1}{2}T_n & = & & 1\cdot\frac{1}{2} & +2\cdot\frac{1}{2^2} & +\ldots \\ \hline \end{array}$$

**(3)** $T_n := 1 + 2\cdot 3 + 3\cdot 3^2 + \cdots + n\cdot 3^{n-1}$

**解答 (1)**

$$\begin{array}{rrcccccccc} & S_n & = & 1+ & \frac{1}{3} & +\frac{1}{3^2} & +\ldots & +\frac{1}{3^n} & \\ -) & \frac{1}{3}S_n & = & & \frac{1}{3} & +\frac{1}{3^2} & +\ldots & +\frac{1}{3^n} & +\frac{1}{3^{n+1}} \\ \hline & \frac{2}{3}S_n & = & 1 & & & & & -\frac{1}{3^{n+1}} \end{array}$$

から

$$S_n = \frac{3}{2}\left(1 - \frac{1}{3^{n+1}}\right)$$

が従います.

**(2)**

$$\begin{array}{rrccccccc} & T_n & = & 1+ & 2\cdot\frac{1}{2} & +3\cdot\frac{1}{2^2} & +\ldots & +n\cdot\frac{1}{2^{n-1}} & \\ -) & \frac{1}{2}T_n & = & & 1\cdot\frac{1}{2} & +2\cdot\frac{1}{2^2} & +\ldots & +(n-1)\cdot\frac{1}{2^{n-1}} & +n\frac{1}{2^n} \\ \hline & \frac{1}{2}T_n & = & 1+ & 1\cdot\frac{1}{2} & +1\cdot\frac{1}{2^2} & +\ldots & +1\cdot\frac{1}{2^{n-1}} & -n\frac{1}{2^n} \end{array}$$

から

$$\frac{1}{2}T_n = \frac{1-\frac{1}{2^n}}{1-\frac{1}{2}} - n\frac{1}{2^n}$$

従って

$$T_n = 4(1 - \frac{1}{2^n}) - n\frac{1}{2^{n-1}}$$

となります.

**(3)**

$$\begin{array}{rrccccccc} & T_n & = & 1+ & 2\cdot 3 & +3\cdot 3^2 & +\ldots & +n\cdot 3^{n-1} & \\ -) & 3T_n & = & & 1\cdot 3 & +2\cdot 3^2 & +\ldots & +(n-1)\cdot 3^{n-1} & +n\cdot 3^n \\ \hline & -2T_n & = & 1+ & 1\cdot 3 & +1\cdot 3^2 & +\ldots & +1\cdot 3^{n-1} & -n\cdot 3^n \end{array}$$

から

$$-2T_n = \frac{3^n - 1}{3 - 1} - n\cdot 3^n$$

従って

$$T_n = \frac{1-3^n}{4} + \frac{1}{2}n\cdot 3^n$$

となります.

**II** 次の差分方程式を解きましょう.

**(1)** $a_0 = 1,\ a_{n+1} = a_n + 3n - 1$

**(2)** $a_0 = 1,\ a_{n+1} = a_n + 2^n + 2n - 1$

**(3)** $a_0 = 6,\ a_{n+1} = 2a_n - 3$

**(4)** $a_0 = 1,\ a_{n+1} = 3a_n + 2n$

**(5)** $a_0 = 3,\ a_{n+1} = 2a_n + 3^{n+1}$

**(6)** $a_0 = 1,\ \ a_1 = 2,\ a_{n+2} + 4a_{n+1} - 5a_n = 0$

**(7)** $a_0 = 1,\ \ a_1 = 2,\ a_{n+2} = a_{n+1} + 6a_n = 0$

**(8)** $a_0 = 1,\ \ a_1 = 1,\ a_{n+2} - 4a_{n+1} + 4a_n = 0$

**解答 (1)** 差分方程式を

$$a_{n+1} - a_n = 3n - 1$$

と見ると

$$a_n = a_0 + (a_1 - a_0) + \cdots + (a_n - a_{n-1}) \tag{1}$$

であるので

$$\begin{aligned}
a_n &= 1 + (3\cdot 0 - 1) + (3\cdot 1 - 1) + (3\cdot 2 - 1) + \cdots + (3\cdot(n-1) - 1)\\
&= 1 + 3(0 + 1 + \cdots + (n-1)) - n\\
&= 1 + 3\cdot\frac{(n-1)n}{2} - n = \frac{3n^2 - 5n + 2}{2}
\end{aligned}$$

<u>注意</u> (1) から形式的に

$$\begin{aligned}
a_n &= a_0 + \sum_{k=0}^{n-1}(a_{k+1} - a_k)\\
&= a_{-} + \sum_{k=0}^{n-1}(3k - 1) = \cdots
\end{aligned}$$

と進めるのもいいでしょう．上の解答では意味を理解して欲しくて，わざと面倒くさく書いています.

**(2)** (1) で示したように

$$\begin{aligned}
a_n &= a_0 + \sum_{k=0}^{n-1}(a_{k+1} - a_k)\\
&= a_0 + \sum_{k=0}^{n-1}\left(2^k + 2k - 1\right)\\
&= 1 + \sum_{k=0}^{n-1}2^k + 2\sum_{k=0}^{n-1}k - \sum_{k=0}^{n-1}1\\
&= 1 + \frac{2^n - 1}{2 - 1} + 2\frac{(n-1)n}{2} - n = 2^n + n^2 - 2n
\end{aligned}$$

**(3)** $\lambda = 2\lambda - 3$ を解くと $\lambda = 3$ であるので

$$a_{n+1} = 2a_n - 3 \tag{2}$$

$$3 = 2 \cdot 3 - 3 \tag{3}$$

において (2)−(3) を考えると

$$a_{n+1} - 3 = 2(a_n - 3)$$

となる．

**(4)** 差分方程式 $a_{n+1} = 3a_n + 2^n$ の両辺を $3^{n+1}$ で割ると

$$\frac{a_{n+1}}{3^{n+1}} = \frac{a_n}{3^n} + \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^n$$

となる．これから $\left\{\frac{a_n}{3^n}\right\}$ の階差数列を得るので

$$\begin{aligned}
\frac{a_n}{3^n} &= \frac{a_0}{3^0} + \sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{a_{k+1}}{3^{k+1}} - \frac{a_k}{3^k}\right) \\
&= 1 + \sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^k \\
&= 1 + \frac{1}{3}\cdot\frac{1-\left(\frac{2}{3}\right)^n}{1-\frac{2}{3}} \\
&= 1 + \left(1 - \left(\frac{2}{3}\right)^n\right)
\end{aligned}$$

から

$$a_n = 3^n + 3^n - 2^n = 2\cdot 3^n - 2^n$$

**(5)** かります差分方程式 $a_{n+1} = 2a_n + 3^{n+1}$ の両辺を $2^{n+1}$ で割ると

$$\frac{a_{n+1}}{2^{n+1}} = \frac{a_n}{2^n} + \left(\frac{3}{2}\right)^{n+1}$$

となる．これから $\left\{\frac{a_n}{2^n}\right\}$ の階差数列を得るので

$$\begin{aligned}
\frac{a_n}{2^n} &= \frac{a_0}{2^0} + \sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{a_{k+1}}{2^{k+1}} - \frac{a_k}{2^k}\right) \\
&= 3 + \sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{3}{2}\right)^{k+1} \\
&= 3 + \frac{\frac{3}{2} - \left(\frac{3}{2}\right)^{n+1}}{1-\frac{3}{2}} \\
&= 3 - 2\left(\frac{3}{2} - \left(\frac{3}{2}\right)^{n+1}\right) = \left(\frac{3}{2}\right)^{n+1}
\end{aligned}$$

から

$$a_n = 3^{n+1}$$

<u>別解</u> 差分方程式

$$a_{n+1} = 2a_n + 3^{n+1} \tag{4}$$

の解を（初期条件を考えないで）$a_n = C \cdot 3^n$ の形で求めてみます．すなわち

$$C \cdot 3^{n+1} = 2C \cdot 3^n + 3^{n+1} \quad (n = 0, 1, 2, \cdots)$$

を満たす $C$ を求める．この両辺を $3^n$ で割ると

$$3C = 2C + 3$$

から $C = 3$ を得ます．これから

$$3 \cdot 3^{n+1} = 1 \cdot 3 \cdot 3^n + 3^{n+1} \tag{5}$$

が成立することが分かりました．さらに (4)–(5) を考えると

$$a_{n+1} - 3 \cdot 3^{n+1} = 2\left(a_n - 3 \cdot 3^n\right)$$

となるので $\{a_n - 3 \cdot 3^n\}$ は公比 2 の等比数列であることが分かります．よって

$$a_n - 3 \cdot 3^n = 2^n(a_0 - 3 \cdot 3^0) = 2^n(3 - 3) = 0$$

から

$$a_n = 3^{n+1}$$

であることが分かります.

**(6)** 差分方程式 $a_{n+2} + 4a_{n+1} - 5a_n = 0$ の特性方程式

$$\lambda^2 + 4\lambda - 5 = 0$$

を解くと $\lambda = -5, 1$ となります．これを用いて方程式を

$$\begin{cases} a_{n+2} + 5a_{n+1} &= a_{n+1} + 5a_n \\ a_{n+2} - a_{n+1} &= 5(a_{n+1} - a_n) \end{cases}$$

と変形します．これから

$$a_{n+1} + 5a_n = a_1 + 5a_0 \tag{6}$$

$$a_{n+1} - a_n = 5^n(a_1 - a_0) \tag{7}$$

が導かれますが，(6)–(7) から

$$6a_n = a_1 + 5a_0 + 5^n(a_1 - a_0) = 7 + 5^n$$

従って

$$a_n = \frac{7}{6} + \frac{1}{6} \cdot 5^n$$

となります.

**(7)** 差分方程式 $a_{n+2} - a_{n+1} - 6a_n = 0$ の特性方程式

$$\lambda^2 - \lambda - 6 = 0$$

を解くと $\lambda = 3, -2$ となります．これを用いて方程式を

$$\begin{cases} a_{n+2} + 2a_{n+1} &= 3(a_{n+1} + 2a_n) \\ a_{n+2} - 3a_{n+1} &= -2(a_{n+1} - 3a_n) \end{cases}$$

と変形します．これから

$$a_{n+1}+2a_n=3^n(a_1+2a_0) \tag{8}$$

$$a_{n+1}-3a_n=(-2)^n(a_1-3a_0) \tag{9}$$

が導かれますが，(8)−(9) から

$$\begin{aligned} 5a_n &= 3^n(a_1+2a_0)-(-2)^n(a_1-3a_0) \\ &= 3^n(2+2\cdot 1)-(-2)^n(2-3\cdot 1)=4\cdot 3^n+(-2)^n \end{aligned}$$

従って

$$a_n=\frac{4}{5}\cdot 3^n+\frac{1}{5}\cdot(-2)^n$$

となります．

**(8)** 差分方程式 $a_{n+2}-4a_{n+1}+4a_n=0$ の特性方程式

$$\lambda^2-4\lambda+4=0$$

を解くと $\lambda=2$（重根）となります．これを用いて方程式を

$$a_{n+2}-2a_{n+1}=2(a_{n+1}-2a_n)$$

と変形すると

$$a_{n+1}-2a_n=2^n(a_1-2a_0)=-2^n$$

となります．この各辺を $2^{n+1}$ で割ると

$$\frac{a_{n+1}}{2^{n+1}}-\frac{a_n}{2^n}=-\frac{1}{2}$$

となります．これは $\left\{\frac{a_n}{2^n}\right\}$ が公差 $-\frac{1}{2}$ の等比数列であることを意味します．従って

$$\frac{a_n}{2^n}=\frac{a_0}{2^0}+n\left(-\frac{1}{2}\right)=1-\frac{n}{2}$$

から

$$a_n=2^n-n\cdot 2^{n-1}$$

であることが分かります．

**III (1)** $\frac{1}{k(k+1)}-\frac{1}{(k+1)(k+2)}$ を計算しましょう．
**(2)** (1) を用いて

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)(k+2)}$$

を計算しましょう．

**解答 (1)**

$$\frac{1}{k(k+1)}-\frac{1}{(k+1)(k+2)}=\frac{k+2-k}{k(k+1)(k+2)}=\frac{2}{k(k+1)(k+2)}$$

**(2)** (1) から示される

$$\frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{k(k+1)} - \frac{1}{(k+1)(k+2)} = \right)$$

を用いる．ここで $a_k = \frac{1}{k(k+1)}$ とおくと

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)(k+2)} &= -\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}(a_{k+1} - a_k) \\ &= -\frac{1}{2}(a_{n+1} - a_1) \\ &= -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{(n+1)(n+2)} - \frac{1}{2}\right) = \frac{n(n+3)}{4(n+1)(n+2)}\end{aligned}$$

**IV (1)** $(k+1)k(k-1) - k(k-1)(k-2)$ を計算しましょう。

**(2)** $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k(k-1)$ と $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2$ を計算しましょう。

**(3)** (2) と同様のテクニックを使って $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(k+1)k(k-1)$ と $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^3$ を計算しましょう。

**解答 (1)**

$$(k+1)k(k-1) - k(k-1)(k-2) = k(k-1)\{(k+1) - (k-2)\} = 3k(k-1)$$

**(2)** (1) から

$$k(k-1) = \frac{1}{3}(k+1)k(k-1) - \frac{1}{3}k(k-1)(k-2)$$

が成立します．$f(k) = \frac{1}{3}k(k-1)(k-2)$ とすると

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} k(k-1) &= \sum_{k=1}^{n}(f(k+1) - f(k)) \\ &= f(n+1) - f(1) = \frac{1}{3}(n+1)n(n-1) = \frac{1}{3}(n^3 - n)\end{aligned}$$

となります．さらに

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} k^2 &= \sum_{k=1}^{n} k(k-1) + \sum_{k=1}^{n} k \\ &= \frac{1}{3}(n+1)n(n-1) + \frac{1}{2}n(n+1) = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)\end{aligned}$$

**(3)**

$$\begin{aligned}&(k+2)(k+1)k(k-1) - (k+1)k(k-1)(k-2) \\ &= (k+1)k(k-1)\{(k+2) - (k-2)\} = 4(k+1)k(k-1)\end{aligned}$$

から

$$(k+1)k(k-1) = \frac{1}{4}(k+2)(k+1)k(k-1) - \frac{1}{4}(k+1)k(k-1)(k-2)$$

となります．ここで $g(k) = \frac{1}{4}(k+1)k(k-1)(k-2)$ と定めると

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}(k+1)k(k-1) &= \sum_{k=1}^{n}(g(k+1)-g(k)) \\ &= f(n+1)-f(1) = \frac{1}{4}(n+2)(n+1)n(n-1)\end{aligned}$$

となります．さらに

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}k^3 &= \sum_{k=1}^{n}(k+1)k(k-1) + \sum_{k=1}^{n}k \\ &= \frac{1}{4}(n+2)(n+1)n(n-1) + \frac{1}{2}n(n+1) \\ &= \frac{1}{4}n^2(n+1)^2\end{aligned}$$

と計算されます.

**V** (2017/04/26 第 3 講 小テスト問題) 差分方程式

$$a_{n+2} - 2a_{n+1} + a_n = p \quad (n = 0, 1, 2, 3, \dots)$$

を満たす $\{a_n\}$ を $a_0, a_1, p$ を用いて表しましょう.

**解答**

$$b_n = a_{n+1} - a_n \quad (n = 0, 1, 2, 3, \dots)$$

とすると差分方程式は

$$b_{n+1} - b_n = p \quad (n = 0, 1, 2, 3, \dots)$$

となる．従って $\{b_n\}$ は公差 $p$ の等差数列であるので

$$b_n = b_0 + np = a_1 - a_0 + np \quad (n = 0, 1, 2, 3, \dots)$$

と表される．さらに

$$\begin{aligned}a_n &= a_0 + (a_1 - a_0) + (a_2 - a_1) + \cdots + (a_n - a_{n-1}) \\ &= a_0 + (a_1 - a_0) + \{a_1 - a_0 + p\} + \{a_1 - a_0 + 2p\} \\ &\quad \{a_1 - a_0 + 3p\} + \cdots + \{a_1 - a_0 + (n-1)p\} \\ &= a_0 + n(a_1 - a_0) + p\,(0 + 1 + 2 + \cdots + (n-1)) \\ &= a_0 + n(a_1 - a_0) + \frac{n(n-1)}{2}p\end{aligned}$$

と計算されます.

**VI** (2018/04/25 第 3 講 小テスト問題) 差分方程式

$$\left\{\begin{array}{ccccc} a_{n+1} & = & 2a_n + \frac{1}{2^n} & (n = 0, 1, 2, \dots) & (1) \\ a_0 & = & C & & (2) \end{array}\right.$$

の解を求めましょう.

**解答**　(1) の両辺を $2^{n+1}$ で割ると

$$\frac{a_{n+1}}{2^{n+1}} - \frac{a_n}{2^n} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4^n} \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

を得ます．これから

$$\begin{array}{cccccc}
 & \frac{a_n}{2^n} & - & \frac{a_{n-1}}{2^{n-1}} & = & \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4^{n-1}} \\
 & \frac{a_{n-1}}{2^{n-1}} & - & \frac{a_{n-2}}{2^{n-2}} & = & \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4^{n-2}} \\
 & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
+) & \frac{a_1}{2} & - & \frac{a_0}{1} & = & \frac{1}{2}\cdot 1 \\
\hline
 & \frac{a_n}{2^n} & - & a_0 & = & \frac{1}{2}\left(\frac{1}{4^{n-1}} + \frac{1}{4^{n-2}} + \cdots + \frac{1}{4} + 1\right) \\
 & & & & = & \frac{1}{2}\cdot\frac{1-\frac{1}{4^n}}{1-\frac{1}{4}} \\
 & & & & = & \frac{2}{3}\left(1 - \frac{1}{4^n}\right)
\end{array}$$

となります．従って

$$\frac{a_n}{2^n} = a_0 + \frac{2}{3}\left(1 - \frac{1}{4^n}\right)$$

さらに

$$a_n = C\cdot 2^n + \frac{2}{3}\cdot 2^n - \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2^n}$$

であることが分かります．

**VII** 実数 $r \in \mathbb{R}$ が $r \neq -1$ を満たすとき、極限

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{r^n+1}$$

を求めましょう。

**解答 (i)** $-1 < r < 1$ のとき $r^n \to 0$ $(n \to +\infty)$ が成立しますから

$$\frac{1}{r^n+1} \to \frac{1}{0+1} = 1$$

**(ii)** $r = 1$ のとき

$$\frac{1}{r^n+1} = \frac{1}{2} \to \frac{1}{2}$$

**(iii)** $r < -1$ または $r > 1$ のとき、$\left|\frac{1}{r}\right| < 1$ に注意すると $\left(\frac{1}{r}\right)^n = \frac{1}{r^n} \to 0$ $(n \to +\infty)$ が分かりますから

$$\frac{1}{r^n+1} = \frac{\frac{1}{r^n}}{1+\frac{1}{r^n}} \to \frac{0}{1+0} = 0$$

**VIII** 実数 $r \in \mathbb{R}$ が $r > 0$ を満たすとき、極限

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{nr^n + 1}$$

を求めましょう。

**解答** **(i)** $0 < r < 1$ のとき $nr^n \to 0$ $(n \to +\infty)$ が成立しますから

$$\frac{1}{nr^n + 1} \to \frac{1}{0 + 1} = 1$$

**(ii)** $r = 1$ のとき

$$\frac{1}{nr^n + 1} = \frac{1}{n + 1} = \frac{\frac{1}{n}}{1 + \frac{1}{n}} \to \frac{0}{1 + 0} = 0$$

**(iii)** $r > 1$ のとき $\left|\frac{1}{r}\right| < 1$ から $\left(\frac{1}{r}\right)^n = \frac{1}{r^n} \to 0$ $(n \to +\infty)$ が成立しますから

$$\frac{1}{nr^n + 1} = \frac{\frac{1}{n} \cdot \frac{1}{r^n}}{1 + \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{r^n}} \to \frac{0 \cdot 0}{1 + 0 \cdot 0} = 0$$

**IX** 次の数列の極限を求めましょう。
(1) $\frac{3n+7}{n^2+n+1}$ (2) $\frac{5n-2}{7n+3}$ (3) $\frac{n^2}{1+n^2}$ (4) $\frac{2^n}{3^n+4}$ (5) $\frac{4^n-5^n}{3^n+5^n}$ (6) $\frac{4^{n+1}+2^{n+1}}{4^n-3^n}$ (7) $\frac{3 \cdot 2^n-5}{2^n+3}$

**(1)**

$$\frac{3n + 7}{n^2 + n + 1} = \frac{1}{n} \cdot \frac{n(3n + 7)}{n^2 + n + 1} = \frac{1}{n} \cdot \frac{3 + 7\frac{1}{n}}{1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}} \to 0 \cdot \frac{3 + 7 \cdot 0}{1 + 0 + 0} = 0$$

**(2)**

$$\frac{5n - 2}{7n + 3} = \frac{5 - 2 \cdot \frac{1}{n}}{7 + 3 \cdot \frac{1}{n}} \to \frac{5 - 2 \cdot 0}{7 + 3 \cdot 0} = \frac{5}{7}$$

**(3)**

$$\frac{n^2}{1 + n^2} = \frac{1}{\frac{1}{n^2} + 1} \to \frac{1}{0 + 1} = 1 \quad (n \to +\infty)$$

**(4)**

$$\frac{2^n}{3^n + 4} = \frac{\left(\frac{2}{3}\right)^n}{1 + 4 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^n} \to \frac{0}{1 + 4 \cdot 0} = 0$$

**(5)**

$$\frac{4^n - 5^n}{3^n + 5^n} = \frac{\left(\frac{4}{5}\right)^n - 1}{\left(\frac{3}{5}\right)^n + 1} \to \frac{0 - 1}{0 + 1} = -1 \quad (n \to +\infty)$$

**(6)**

$$\frac{4^{n+1}+2^{n+1}}{4^n-3^n}=\frac{4+2\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1-\left(\frac{3}{4}\right)^n}\to\frac{4+2\cdot 0}{1-0}=4 \quad (n\to+\infty)$$

**(7)**

$$\frac{3\cdot 2^n-5}{2^n+3}=\frac{3-5\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1+3\left(\frac{1}{2}\right)^n}\to\frac{3-5\cdot 0}{1+3\cdot 0}=3 \quad (n\to+\infty)$$

**X** $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} n\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}$ の値を求めましょう。

**解答**

$$S_n=\sum_{k=1}^{n} k\left(\frac{1}{4}\right)^{k-1}$$

とします。

$$\begin{array}{rcccccccc}
S_n & = & 1+ & 2\cdot\frac{1}{4}+ & 3\cdot\frac{1}{4^2}+ & 4\cdot\frac{1}{4^3}+ & \cdots+ & n\cdot\frac{1}{4^{n-1}} & \\
-)\frac{1}{4}S_n & = & & 1\cdot\frac{1}{4}+ & 2\cdot\frac{1}{4^2}+ & 3\cdot\frac{1}{4^3}+ & \cdots+ & (n-1)\cdot\frac{1}{4^{n-1}} & +n\cdot\frac{1}{4^n} \\
\hline
\frac{3}{4}S_n & = & 1+ & \frac{1}{4}+ & \frac{1}{4^2}+ & \frac{1}{4^3}+ & \cdots+ & \frac{1}{4^{n-1}} & -n\cdot\frac{1}{4^n}
\end{array}$$

から

$$\begin{aligned}
S_n &= \frac{4}{3}\cdot\frac{1-\frac{1}{4^n}}{1-\frac{1}{4}}-\frac{4}{3}\cdot\frac{n}{4^n}=\frac{16}{9}\cdot\left(1-\left(\frac{1}{4}\right)^n\right)-\frac{4}{3}\cdot n\left(\frac{1}{4}\right)^n \\
&\to \frac{16}{9}(1-0)-\frac{4}{3}\cdot 0=\frac{16}{9}
\end{aligned}$$

よって

$$\sum_{n=1}^{+\infty} n\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}=\frac{16}{9}$$

**XI** $|r|<1$ のとき $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} n^2r^n=0$ であることを示しましょう.

**解答**

**(i)** $\underline{0<r<1\text{ のとき}}$ $s=\frac{1}{r}$ とおくと $s>1$ となります．このとき $s=1+\theta$ とすると $\theta>0$ であることに注意しましょう．このとき

$$\begin{aligned}
\frac{1}{r^n} &= s^n=(1+\theta)^n \\
&= 1+{}_nC_1\theta+{}_nC_2\theta^2+{}_nC_3\theta^3+{}_nC_4\theta^4+\cdots+\theta^n
\end{aligned}$$

の最左辺において各項が正ですから

$$\frac{1}{r^n}>{}_nC_3\theta^3=\frac{n(n-1)(n-2)}{3!}\theta^3$$

であることが従います．よって

$$0 < r^n < \frac{1}{\theta^3} \cdot \frac{3!}{n(n-1)(n-2)} \quad \text{から} \quad 0 < n^2 r^n < \frac{1}{\theta^3} \cdot \frac{3!}{(1-\frac{1}{n})(1-\frac{2}{n})} \cdot \frac{1}{n}$$

であることが分かります．ここで

$$\frac{1}{\theta^3} \cdot \frac{3!}{(1-\frac{1}{n})(1-\frac{2}{n})} \cdot \frac{1}{n} \to 0 \quad (n \to +\infty)$$

ですから

$$n^2 r^n \to 0 \quad (n \to +\infty)$$

であることが分かります．

**(ii)** $\underline{r = 0 \text{ のとき}}$ $n^2 r^n = 0 \to 0 \quad (n \to +\infty)$

**(iii)** $\underline{-1 < r < 0 \text{ のとき}}$ $\rho = -r$ とすると $0 < \rho < 1$ となります．このとき

$$-\rho^n \leq r^n \leq \rho^n \quad \text{から} \quad -n^2 \rho^n \leq n^2 r^n \leq n^2 \rho^n$$

が成立します．ここで

$$-n^2 \rho^n \to 0,\ n^2 \rho^n \to 0\ (n \to +\infty)$$

が成立しますから，はさみうちの定理から

$$n^2 r^n \to 0 \quad (n \to +\infty)$$

であることが導かれます．