2020 年 05 月 06 日演習問題解答

I 以下の差分方程式を解きましょう．

(1) $\begin{cases} a_{n+1} = 3a_n - 2 \\ a_0 = \alpha \end{cases}$ **(2)** $\begin{cases} a_{n+1} = -\frac{1}{2}a_n + 1 \\ a_0 = \alpha \end{cases}$ **(3)** $\begin{cases} a_{n+2} - a_{n+1} - 2a_n = 0 \\ a_0 = \alpha,\ a_1 = \beta \end{cases}$

(4) $\begin{cases} a_{n+2} - 4a_{n+1} + 3a_n = 0 \\ a_0 = \alpha,\ a_1 = \beta \end{cases}$ **(5)** $\begin{cases} a_{n+2} + 6a_{n+1} + 9a_n = 0 \\ a_0 = \alpha,\ a_1 = \beta \end{cases}$ **(6)** $\begin{cases} a_{n+2} - a_{n+1} + \frac{1}{4}a_n = 0 \\ a_0 = \alpha,\ a_1 = \beta \end{cases}$

解答

(1) 方程式 $\lambda = 3\lambda - 2$ を解くと $\lambda = 1$ となるので

$$\begin{array}{rrcll} & a_{n+1} & = & 3a_n - 2 & \cdots(i) \\ -) & 1 & = & 3\cdot 1 - 2 & \cdots(ii) \\ \hline & a_{n+1} - 1 & = & 3(a_n - 1) & \cdots(iii) \end{array}$$

を得ます．(iii) 式は $\{a_n - 1\}$ が公比 3 の等比数列であることを意味しますから

$$a_n - 1 = 3^n(a_0 - 1) = 3^n(\alpha - 1)$$

すなわち

$$a_n = 3^n(\alpha - 1) + 1$$

であることが分かります．

(2) 方程式 $\lambda = -\frac{1}{2}\lambda + 1$ を解くと $\lambda = \frac{2}{3}$ となるので

$$\begin{array}{rrcll} & a_{n+1} & = & -\frac{1}{2}a_n + 1 & \cdots(i) \\ -) & \frac{2}{3} & = & -\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3} + 1 & \cdots(ii) \\ \hline & a_{n+1} - \frac{2}{3} & = & -\frac{1}{2}(a_n - \frac{2}{3}) & \cdots(iii) \end{array}$$

を得ます．(iii) 式は $\{a_n - \frac{2}{3}\}$ が公比 $-\frac{1}{2}$ の等比数列であることを意味しますから

$$a_n - \frac{2}{3} = \left(-\frac{1}{2}\right)^n (a_0 - \frac{2}{3}) = \left(-\frac{1}{2}\right)^n (\alpha - \frac{2}{3})$$

すなわち

$$a_n = \left(-\frac{1}{2}\right)^n (\alpha - \frac{2}{3}) + \frac{2}{3}$$

であることが分かります．

(3) 特性方程式 $\lambda^2 - \lambda - 2 = 0$ を解くと $\lambda = -1, 2$ となりますから，差分方程式は

$$a_{n+2} - (2 + (-1))a_{n+1} + (-1)2a_n = 0$$

とみることができます．これを

$$\begin{cases} a_{n+2} - 2a_{n+1} = (-1)(a_{n+1} - 2a_n) & \cdots(i) \\ a_{n+2} + a_{n+1} = 2(a_{n+1} + a_n) & \cdots(ii) \end{cases}$$

と変形できます．(i) 式から $\{a_{n+1} - 2a_n\}$ は公比 (-1) の等比数列であることがわかりますから

$$a_{n+1} - 2a_n = (-1)^n(a_1 - 2a_0) \qquad \text{(iii)}$$

となります．他方 (ii) 式から $\{a_{n+1} + a_n\}$ は公比 2 の等比数列であることがわかりますから

$$a_{n+1} + a_n = 2^n(a_1 + a_0) \qquad \text{(iv)}$$

となります．(iv)−(iii) から

$$3a_n = 2^n(a_1 + a_0) - (-1)^n(a_1 - 2a_0)$$

従って

$$\begin{aligned} a_n &= 2^n\frac{a_1 + a_0}{3} - (-1)^n\frac{a_1 - 2a_0}{3} \\ &= 2^n\frac{\beta + \alpha}{3} - (-1)^n\frac{\beta - 2\alpha}{3} \end{aligned}$$

であることが分かります．

(4) 特性方程式 $\lambda^2 - 4\lambda + 3 = 0$ を解くと $\lambda = 1, 3$ となりますから，差分方程式は

$$a_{n+2} - (1 + 3)a_{n+1} + 1\cdot 3a_n = 0$$

とみることができます．これを

$$\begin{cases} a_{n+2} - a_{n+1} = 3(a_{n+1} - a_n) & \cdots(i) \\ a_{n+2} - 3a_{n+1} = a_{n+1} - 3a_n & \cdots(ii) \end{cases}$$

と変形できます．(i) 式から $\{a_{n+1} - a_n\}$ は公比 3 の等比数列であることがわかりますから

$$a_{n+1} - a_n = 3^n(a_1 - a_0) \qquad \text{(iii)}$$

となります．他方 (ii) 式から $\{a_{n+1}-3a_n\}$ は公比 1 の等比数列（定数列）であることがわかりますから

$$a_{n+1}-3a_n = a_1-3a_0 \tag{iv}$$

となります．(iv)−(iii) から

$$2a_n = 3^n(a_1-a_0)-(a_1-3a_0)$$

従って

$$\begin{aligned} a_n &= 3^n\frac{a_1-a_0}{2}-\frac{a_1-3a_0}{2} \\ &= 2^n\frac{\beta-\alpha}{2}-\frac{\beta-3\alpha}{2} \end{aligned}$$

であることが分かります．

(5) 特性方程式 $\lambda^2+6\lambda+9=0$ を解くと $\lambda=-3$（重根）となりますから，差分方程式は

$$a_{n+2}-((-3)+(-3))a_{n+1}+(-3)\cdot(-3)a_n=0$$

とみることができます．これを

$$a_{n+2}+3a_{n+1}=(-3)(a_{n+1}+3a_n)$$

と変形できます．(i) 式から $\{a_{n+1}+3a_n\}$ は公比 -3 の等比数列であることがわかりますから

$$a_{n+1}+3a_n=(-3)^n(a_1+3a_0) \tag{i}$$

となります．(i) 式の両辺を $(-3)^{n+1}$ で割ると

$$\frac{a_{n+1}}{(-3)^{n+1}}-\frac{a_n}{(-3)^n}=-\frac{a_1+3a_0}{3}$$

が従いますが，これは $\{\frac{a_n}{(-3)^n}\}$ が公差 $-\frac{a_1+3a_0}{3}$ の等差数列であることを意味します．従って

$$\frac{a_n}{(-3)^n}=\frac{a_0}{(-3)^0}-\frac{(a_1+3a_0)n}{3}$$

から

$$\begin{aligned} a_n &= a_0(-3)^n+(-3)^{n-1}n(a_1+3a_0) \\ &= \alpha(-3)^n+(\beta+3\alpha)n(-3)^{n-1} \end{aligned}$$

であることが分かります．

(6) 特性方程式 $\lambda^2-\lambda+\frac{1}{4}=0$ を解くと $\lambda=\frac{1}{2}$（重根）となりますから，差分方程式は

$$a_{n+2}-(\frac{1}{2}+\frac{1}{2})a_{n+1}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}a_n=0$$

とみることができます．これを

$$a_{n+2}-\frac{1}{2}a_{n+1}=\frac{1}{2}(a_{n+1}-\frac{1}{2}a_n)$$

と変形できます．(i) 式から $\{a_{n+1}-\frac{1}{2}a_n\}$ は公比 $\frac{1}{2}$ の等比数列であることがわかりますから

$$a_{n+1}-\frac{1}{2}a_n=\frac{1}{2^n}(a_1-\frac{1}{2}a_0) \tag{i}$$

となります．(i) 式の両辺を $\frac{1}{2^{n+1}}$ で割ると

$$2^{n+1}a_{n+1}-2^na_n=2(a_1-\frac{1}{2}a_0)$$

が従いますが，これは $\{2^na_n\}$ が公差 $2(a_1-\frac{1}{2}a_0)$ の等差数列であることを意味します．従って

$$2^na_n=2^0a_0+n\cdot 2(a_1-\frac{1}{2}a_0)$$

から

$$\begin{aligned} a_n &= a_0\frac{1}{2^n}+\frac{n}{2^{n-1}}(a_1-\frac{1}{2}a_0) \\ &= \alpha\frac{1}{2^n}+(\beta-\frac{1}{2}\alpha)\frac{n}{2^{n-1}} \end{aligned}$$

であることが分かります．

II(1) 講義中

$$ {}_nC_k = \frac{n!}{(n-k)!k!} $$

を用いて

$$ k \cdot {}_nC_k = n \cdot {}_{n-1}C_{k-1} $$

を示しました.n 個の違いのない白玉から 1 個と $(k-1)$ 個を選んで,1 個の方を赤く塗り,$(k-1)$ 個の方に黒く塗る組み合わせの数としてこの等式を説明しましょう.

(2) (1) と同様に

$$ {}_kC_2 \cdot {}_nC_k = {}_nC_2 \cdot {}_{n-2}C_{k-2} $$

を示しましょう.

解答 (1) まず n 個から k 個選ぶのは ${}_nC_k$ 通りある．選んだ k 個から 1 個選ぶのは ${}_kC_1 = k$ 通りである．よって

$$ k \cdot {}_nC_k \text{通り} $$

ある．他方，n 個から 1 個選び，残る $(n-1)$ 個から $(k-1)$ 個選ぶと

$$ {}_nC_1 \cdot {}_{n-1}C_{k-1} = n \cdot {}_{n-1}C_{k-1} \text{通り} $$

よって

$$ k \cdot {}_nC_k = n \cdot {}_{n-1}C_{k-1} $$

(2) n 個から 2 個と $k-2$ 個を選ぶ組み合わせの数を 2 通りの考え方で求める．

方法 I n 個から $k = 2 + (k-2)$ 個選び，その k 個から 2 個選ぶと

$$ {}_nC_k \cdot {}_kC_2 \text{通り} $$

方法 II n 個から 2 個選び，残る $n-2$ 個から $k-2$ 個選ぶと

$$ {}_nC_2 \cdot {}_{n-2}C_{k-2} \text{通り} $$

よって

$$ {}_kC_2 \cdot {}_nC_k = {}_nC_2 \cdot {}_{n-2}C_{k-2} $$

III $(x+y)^5$ を展開しましょう.

解答

$$
\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 2 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & \\
 & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & \\
1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1
\end{array}
$$

上の Pascal の三角形から

$$(x+y)^5 = x^5 + 5x^4y + 10x^3y^2 + 10x^2y^3 + 5xy^4 + y^5$$

と展開されます.

IV 以下の組み合わせの数を求めましょう.
(1) ${}_5C_2$ **(2)** ${}_5C_3$ **(3)** ${}_6C_1$ **(4)** ${}_7C_2$ **(5)** ${}_8C_3$

解答 **(1)** ${}_5C_2 = \frac{5\cdot4}{2\cdot1} = 10$
(2) ${}_5C_3 = {}_5C_2 = 10$ または ${}_5C_3 = \frac{5\cdot4\cdot3}{3\cdot2\cdot1} = 10$
(3) ${}_6C_1 = \frac{6}{1} = 6$
(4) ${}_7C_2 = \frac{7\cdot6}{2\cdot1} = 21$
(5) ${}_8C_3 = \frac{8\cdot7\cdot6}{3\cdot2\cdot1} = 56$