

積分 IV

置換積分（その1）

戸瀬 信之

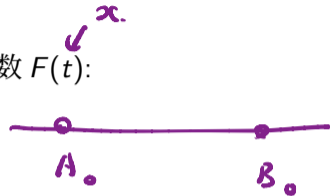
ITOSE PROJECT

V01b Nov 24, 2020 for CalcNT

置換積分 (1)

开区間 (A_0, B_0) 上の連続関数 $f: (A_0, B_0) \rightarrow \mathbf{R}$ とその原始関数 $F(t)$:

$$F'(x) = f(x) \quad (x \in (A_0, B_0))$$



さらに連続関数 $\varphi: (a_0, b_0) \rightarrow \mathbf{R}$ が

存在可能.

$$\varphi(t) \in (A_0, B_0) \quad (t \in (a_0, b_0))$$

\rightarrow $f(\varphi(t))$
が定義できる.

が成立するとします. このとき

$$\frac{d}{dt}(F(\varphi(t))) = F'(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) = f(\varphi(t))\varphi'(t)$$

$F(\varphi(t))$ が $f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)$ の原始関数

置換積分 (2)

$$\int_a^b f(\varphi(t))\varphi'(t)dt = [F(\varphi(t))]_a^b$$

$$= F(\varphi(b)) - F(\varphi(a))$$

$B = \varphi(b), A = \varphi(a)$ とおく

$$= F(B) - F(A) = \int_A^B f(x)dx$$



元の関数の
F.

公式

$$\int_a^b f(\varphi(t))\varphi'(t)dt = \int_A^B f(x)dx$$

具体例(1)

$$(1+t^2)' = 2t \rightarrow \left\{ \frac{1}{2} (1+t^2) \right\}' = t$$

$$I_1 := \int_0^1 (1+t^2)^4 t dt = \frac{1}{2} \int_0^1 (1+t^2)^4 (1+t^2)' dt$$

$$(g(t))^4$$

$$f(x) = x^4$$

$$= \frac{1}{2} \int_1^2 x^4 dx$$

" $g'(t)$

$$A = g(a), \quad B = g(b)$$

$$1 = g(0), \quad 2 = g(1)$$

$$= \frac{1}{2} \left[\frac{x^5}{5} \right]_1^2 = \frac{1}{10} (2^5 - 1) = \frac{31}{10}$$

ここで対応

t	0	↗	1
x	1	↗	2

を用いています。

$$(x^5)' = 5x^4$$

$$\left(\frac{1}{5} x^5 \right)' = x^4$$

具体例(2)

$$x = \varphi(t) = 1+t^2$$

$$\varphi'(t) = 2t$$

$$\frac{1}{2} \int_0^1 \frac{2t}{1+t^2} dt.$$

$$\int_0^1 \frac{t}{1+t^2} dt = \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{(1+t^2)'}{1+t^2} dt$$

$$B = \varphi(b), A = \varphi(a)$$

$$= \frac{1}{2} \int_1^2 \frac{1}{x} dx$$

$$2 = \varphi(1) \quad 0 = \varphi(0)$$

$$= \frac{1}{2} [\log x]_1^2 = \frac{1}{2} \log 2$$

$$(\log x)' = \frac{1}{x}$$

$$\log 1 = 0$$

ここで対応 $\begin{array}{c|c} t & 0 \\ x & 1 \end{array} \begin{array}{l} \nearrow \\ \nearrow \end{array} \begin{array}{c} 1 \\ 2 \end{array}$ を用いています。

具体例(2)

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{t}{1+t^2} dt &= \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{(1+t^2)'}{1+t^2} dt \\ &= \frac{1}{2} \int_1^2 \frac{1}{x} dx \\ &= \frac{1}{2} [\log x]_1^2 = \frac{1}{2} \log 2\end{aligned}$$

ここで対応 $\begin{array}{c|c} t & 0 \\ x & 1 \end{array} \begin{array}{l} \nearrow \\ \nearrow \end{array} \begin{array}{c} 1 \\ 2 \end{array}$ を用いています。