積分 I

微分積分学の基本定理

戸瀬　信之

ITOSE PROJECT

V01 Nov 11, 2020 for CalcNT

・積分とは何か？

面積 →

S

$y = x^2$ → x

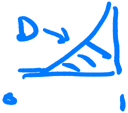
Sはどのように定義

$= \int_0^1 x^3 dx.$

・$\int_0^1 x^2 dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \frac{1}{3}$

$\left(\frac{x^3}{3}\right)' = x^2$

積分とは (1)



$y = x^2$

$$D := \{(x, y) \in \mathbf{R}^2; 0 \leq x \leq 1,\ 0 \leq y \leq x^2\}$$

の面積を S とします．S を求めるために閉区間 $[0, 1]$ を N 等分します：

$= x_1$　　$= x_N$

$$x_0 = 0 < \frac{1}{N} < \frac{2}{N} < \cdots < \frac{N}{N} = 1 = x_N$$

$= x_2$

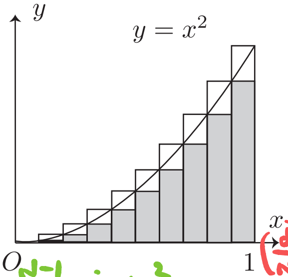
において，$x_j = \frac{j}{N}$ $(j = 0, 1, \cdots, N)$ とおいて

$$S_N = \frac{1}{N}x_1^2 + \frac{1}{N}x_2^2 + \cdots + \frac{1}{N}x_N^2$$

$$= \sum_{j=0}^{N-1} \frac{(j+1)^2}{N^3}$$

$$s_N = \frac{1}{N}x_0^2 + \frac{1}{N}x_1^2 + \cdots + \frac{1}{N}x_{N-1}^2$$

$$= \sum_{j=0}^{N-1} \frac{j^2}{N^3}$$



積分とは (2)

$$s_N < S < S_N$$

が成立することが分かります．ここで

$$S_N = \sum_{j=1}^{N} \left(\frac{j}{N}\right)^2 \frac{1}{N} = \frac{1}{N^3} \sum_{j=1}^{N} j^3 = \frac{1}{N^3} \cdot \frac{1}{6} N(N+1)(2N+1)$$

$$= \frac{1}{6}(1 + \frac{1}{N})(2 + \frac{1}{N}) \longrightarrow \frac{1}{3} \quad (N \longrightarrow +\infty)$$

$\frac{1}{N} \rightarrow 0$

$\frac{1}{6} \cdot 1 \cdot 2 =$

$$s_N = \sum_{j=0}^{N-1} \left(\frac{j}{N}\right)^2 \frac{1}{N} = \frac{1}{N^3} \sum_{j=1}^{N-1} j^3 = \frac{1}{N^3} \frac{1}{6}(N-1)N\{2(N-1)+1\}$$

$= \frac{1}{N^3}(N-1)N(2N-1)$

$$= \frac{1}{6}(1 - \frac{1}{N})(2 - \frac{1}{N}) \longrightarrow \frac{1}{3} \quad (N \longrightarrow +\infty)$$

$\frac{1}{6} \cdot 1 \cdot 2 =$

積分とは(3)

はさみうちの定理.

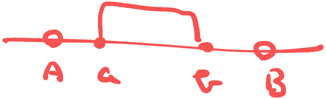
以上で

$$S = \frac{1}{3}$$

が示されました.

連続関数の積分 (1)—定義

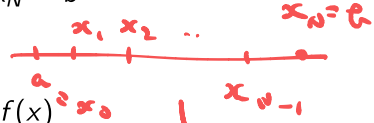
$\mathbf{R}$ の開区間 (A, B) 上の連続関数



$$f: (A, B) \to \mathbf{R}$$

の部分閉区間 $[a, b]$ 上の積分を定義します．まず閉区間 $[a, b]$ の**分割** Δ を定めます．

$$\Delta: \ a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{N-1} < x_N = b$$

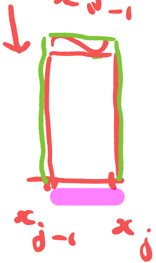


このとき閉区間 $[x_{j-1}, x_j]$ 上の f の最大値，最小値を

$$M_j = \max_{x \in [x_{j-1}, x_j]} f(x), \quad m_j = \max_{x \in [x_{j-1}, x_j]} f(x)$$

を用いて Δ による上積分，下積分を以下のように定義します．

分割



$$S_\Delta := \sum_{j=1}^{N} (x_j - x_{j-1}) \cdot M_j, \quad s_\Delta := \sum_{j=1}^{N} (x_j - x_{j-1}) \cdot m_j$$

上積分　下積分

最大値の定理

$f: [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ 連続

に対して 最大値 M, 最小値 m.

$\underbrace{[0, 1] \text{ のコンパクト性}}$.

連続関数の積分 (2)—定義

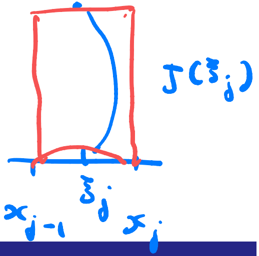
さらに各小区間 $[x_{j-1}, x_j]$ から $\xi_j \in [x_{j-1}, x_j]$ を選んで

$$\Sigma_\Delta(x_j - x_{j-1}) \cdot f(\xi_j)$$

$$= \sum_{j=1}^{N}$$

と定めると $m_j \le f(\xi_j) \le M_j$ から

$$s_\Delta \le \Sigma_\Delta \le S\Delta$$



が従います. 解析入門　下積分　上積分.

Theorem

ある実数 $S \in \mathbf{R}$ に対して $|\Delta| := \max(x_j - x_{j-1}) \to +0$ のとき

分割の粗さ.

$$S_\Delta, \Sigma_\Delta, s_\Delta \to S$$

が成立します．これが f の $[a, b]$ 上の**積分** $\int_a^b f(t)dt$

原始関数（不定積分）

開区間 (A, B) 上の関数 F が f の原始関数（不定積分）とは

微分可能.

$$F'(t) = f(t) \quad (t \in (A, B))$$

が成立するときです．不定積分は次の微分積分学の基本定理から存在が分かります.

一意性.

微分積分学の基本定理

$A \quad a \quad t \quad b \quad B$

$t \in (A, B)$ に対して

$$F(t) := \int_a^t f(s)ds$$

と定義します.

定義

Theorem

$F(t)$ は微分可能で

$$F'(t) = f(t)$$

が成立します.

$t > a$
$t = a$ $\quad \int_a^a = 0.$
$t < a$

f: 連続

$t \quad a \quad b$

$\int_a^t = -\int_t^a$

原始関数（不定積分）と積分 (1)

Theorem

G が f の原始関数であるとき

$f(t)\,dt$

$$\int_a^b = G(b) - G(a)$$

まず　$F := \int_a^t f(s)\,ds.$

$$(G - F)' = f - f = 0$$

から定数 $C \in \mathbf{R}$ が存在して

$$G(t) - F(t) = C \quad (t \in (A, B)) \tag{1}$$

が成立します.

☆ $H' \equiv 0 \Rightarrow H \equiv C$

$\exists c$

$$\frac{H(t) - H(a)}{t - a} = H'(c) = 0$$

$a \quad c \quad t \neq a$

↑

平均値の定理

$H(t) = H(a)$ (定数)

原始関数（不定積分）と積分 (2)

$G(t) - F(t) \equiv C$

$t = a$ を代入して

$$G(a) - F(a) = C \tag{2}$$

次に $t = b$ を代入して

$$G(b) - F(b) = C \tag{3}$$

従って

$\int_a^t f(s)\,ds$

$$\underset{\parallel}{F(b)} = G(b) - C = G(b) - (G(a) - \underbrace{F(a)}_{=0}) = G(b) - G(a)$$

Theorem

f の原始関数 G_1, G_2 に対して，ある定数 $C \in \mathbf{R}$ が存在して

$$G_1(t) = G_2(t) + C \quad (t \in (A, B))$$

$(G_1 - G_2)' = f - f \equiv 0 \to \cdots \to$