2 次正方行列の固有値問題

戸瀬　信之

ITOSE PROJECT

May, 2017 for emath
V04 Oct 26, 2020 for CalcNT

$$A \in M_2(\mathbb{R}) = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

例 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$

$$f_A : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax+ey \\ cx+dy \end{pmatrix}$$

例 $f_A : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} x+2y \\ 4x+3y \end{pmatrix}.$$

座標変換.

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} = \xi \vec{p_1} + \eta \vec{p_2}$$

$P = (\vec{p_1}, \vec{p_2}) \in M_2(\mathbb{R})$

正則.

↑

うまく選ぶ

$$\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} = P^{-1} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix}$ で f_A を表現する.

$$\begin{pmatrix} \xi' \\ \eta' \end{pmatrix} \longleftrightarrow \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \xi' \\ \eta' \end{pmatrix} = P^{-1}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = P^{-1}A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \boxed{P^{-1}AP}\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} \xi' \\ \eta' \end{pmatrix} = \underbrace{P^{-1}AP}_{\text{単純にする.}}\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix}.$$

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}.$$

$$\Updownarrow$$

$$AP = P\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix} \overset{\downarrow}{=} (\alpha\vec{p}_1 \ \beta\vec{p}_2) \longrightarrow \left\{\begin{array}{l} A\vec{p}_1 = \alpha\vec{p}_1 \\ A\vec{p}_2 = \beta\vec{p}_2 \end{array}\right.$$

$$\to\ \ AP = (A\vec{p}_1 \ A\vec{p}_2)$$

P : 正則 $\longrightarrow$ $\vec{p_1} \neq \vec{0}$, $\vec{p_2} \neq \vec{0}$

$$\left.\begin{array}{l} \boxed{(\alpha I_2 - A)}\vec{p_1} = \vec{0} \\ \boxed{(\beta I_2 - A)}\vec{p_2} = \vec{0} \end{array}\right\}$$

$\Downarrow$

$$\boxed{\begin{array}{l} |\alpha I_2 - A| = 0, \\ |\beta I_2 - A| = 0 \end{array}}$$

$|\lambda I_2 - A| = 0$

$\hookrightarrow$ -- 重解.

B : 2×2

$\exists \vec{p} \neq \vec{0}$ に対して

$B\vec{p} = \vec{0}$

$\Updownarrow$

$|B| = 0$

$\Updownarrow$

B は正則

2 次正方行列の正則性（復習）

列ベクトル表示.

$(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$ $\parallel$

$\Leftrightarrow$ ある. $\vec{e}_1 \nparallel \vec{e}_2$.

$(v_1\vec{e}_1 + v_2\vec{e}_2 = \vec{0} \Rightarrow v_1 = v_2 = 0)$

$\Leftrightarrow$

2 次正方行列 $B \in M_2(\mathbf{R})$ に対して

$$B\text{は正則} \quad \Leftrightarrow \quad \left(B\vec{v} = \vec{0} \Rightarrow \vec{v} = \vec{0}\right) \quad \Leftrightarrow \quad |B| \neq 0$$

否定.

特に

$$\exists \vec{v} \neq \vec{0} \ \left(B\vec{v} = \vec{0}\right) \Leftrightarrow |B| = 0$$

2次正方行列の固有方程式

- 2次正方行列 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ の固有多項式

$\lambda I_2 - A = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$
$= \begin{pmatrix} \lambda - a & -b \\ -c & \lambda - d \end{pmatrix}$

$$
\begin{aligned}
\Phi_A(\lambda) &:= |\lambda I_2 - A| \\
&= \begin{vmatrix} \lambda - a & -b \\ -c & \lambda - d \end{vmatrix} = (\lambda - a)(\lambda - d) - bc \\
&= \lambda^2 - (a+d)\lambda + \boxed{ad - bc} = |A| \\
&= \lambda^2 - (a+d)\lambda + \det(A)
\end{aligned}
$$

$a+d = \mathrm{tr}(A)$ Aのトレース trace.

-

$$\Phi_A(\alpha) = 0 \Leftrightarrow A\vec{v} = \alpha\vec{v} \text{を満たす} \vec{v} \neq \vec{0} \text{が存在}$$

$|\alpha I_2 - A| = 0$ $\quad (\alpha I_2 - A)\vec{v} = \vec{0}$.

具体例

- $A = \begin{pmatrix}1 & 2\\ 4 & 3\end{pmatrix}$ の固有多項式

$\lambda I_2 - A = \begin{pmatrix}\lambda & 0\\ 0 & \lambda\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1 & 2\\ 4 & 3\end{pmatrix}$

$|\lambda I_2 - A|$

$A\vec{p} = \alpha \vec{p}$
$\exists \vec{p}$ ある.
$\Longleftrightarrow \alpha = 5, -1.$

固有ベクトル

$$\Phi_A(\lambda) = \begin{vmatrix}\lambda - 1 & -2\\ -4 & \lambda - 3\end{vmatrix} = (\lambda-1)(\lambda-3) - (-2)(-4)$$

$$= \lambda^2 - 4\lambda - 5 = (\lambda - 5)(\lambda + 1)$$

$\lambda = 5, -1$ Aの固有値.

$5 \neq -1 \longrightarrow$ 対角化できる.

- 固有値 $\lambda = 5$ の固有ベクトルを求める。

$A\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix} = 5\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}$

$\Leftrightarrow (5I_2 - A)\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix} = \vec{0}$

$$\begin{pmatrix}4 & -2\\ -4 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix} = \vec{0} \Leftrightarrow 4x - 2y = 0 \Leftrightarrow y = 2x$$

$\begin{cases}4x - 2y = 0\\ -4x + 2y = 0.\end{cases}$

から

$$\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x\\ 2x\end{pmatrix} = x\begin{pmatrix}1\\ 2\end{pmatrix} \quad (x \neq 0)$$

$\leftarrow x = 1 \quad \vec{p}_1 = \begin{pmatrix}1\\ 2\end{pmatrix}$

$\rightsquigarrow A\vec{p}_1 = 5\vec{p}_1$

- 固有値 $\lambda = -1$ の固有ベクトルを求める。

$A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

$\Leftrightarrow (-I_2 - A)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \vec{0}$

$$\begin{pmatrix} -2 & -2 \\ -4 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \vec{0} \Leftrightarrow -2x - 2y = 0 \Leftrightarrow y = -x$$

$\Leftrightarrow \begin{cases} -2x - 2y = 0 \\ -4x - 4y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x + y = 0$

から

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ -x \end{pmatrix} = x\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad (x \neq 0)$$

$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$x = 1$ とする $\vec{p}_2$

$A\vec{p}_2 = -\vec{p}_2$

$\begin{pmatrix} 0.1 \\ -0.1 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 100 \\ -100 \end{pmatrix}$ $\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

行列の対角化

- $\vec{p}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\vec{p}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $P = (\vec{p}_1 \ \vec{p}_2)$ とすると

$$\begin{aligned} AP &= (A\vec{p}_1 \ A\vec{p}_2) = (5\vec{p}_1 \ -\vec{p}_2) \\ &= (\vec{p}_1 \ \vec{p}_2)\begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = P\begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$(\vec{p}_1 \ \vec{p}_2)\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = c_1\vec{p}_1 + c_2\vec{p}_2$$

- $\det(P) = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -3 \neq 0$ から P は正則
- A は対角化可能

$$AP = P\begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

一般論で重要になる。

P^{-1}

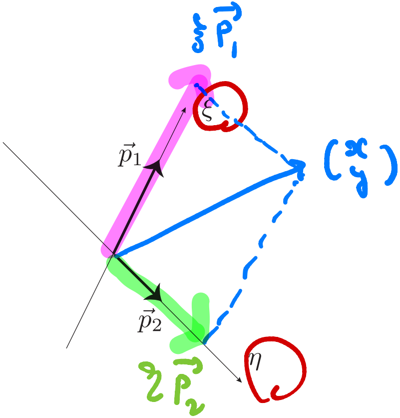
行列の対角化（その意味）

- A が定める変換 $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$
- 変数変換

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \xi \vec{p}_1 + \eta \vec{p}_2 = P \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \xi' \vec{p}_1 + \eta' \vec{p}_2 = P \begin{pmatrix} \xi' \\ \eta' \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} = P^{-1} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$



行列の対角化（その意味）(No.2)

座標変換で $f_A:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ を見えるようにしている!!

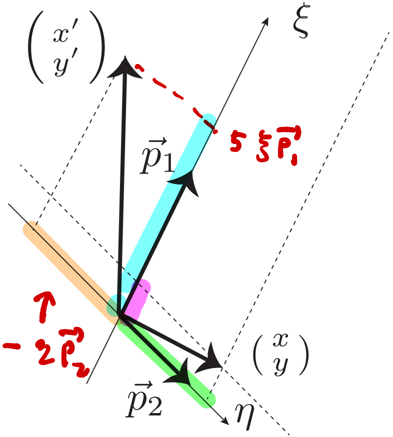
$$\begin{pmatrix}\xi'\\ \eta'\end{pmatrix} = P^{-1}\begin{pmatrix}x'\\ y'\end{pmatrix} = P^{-1}A\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix} = P\begin{pmatrix}\xi\\ \eta\end{pmatrix}$$

$$= \boxed{P^{-1}AP}\begin{pmatrix}\xi\\ \eta\end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix}5 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\xi\\ \eta\end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix}5\xi\\ -\eta\end{pmatrix}$$



行列の対角化（その応用）

- 対角化 $A = P\begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} P^{-1}$

$$
\begin{aligned}
A^2 &= P\begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} P^{-1} P\begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} P^{-1} \\
&= P\begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} I_2 \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} P^{-1} \\
&= P\begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} P^{-1} = P\begin{pmatrix} 5^2 & 0 \\ 0 & (-1)^2 \end{pmatrix} P^{-1} \\
A^n &= P\begin{pmatrix} 5^n & 0 \\ 0 & (-1)^n \end{pmatrix} P^{-1}
\end{aligned}
$$

$\in M_2(\mathbb{R})$　　$\alpha, \beta \in \mathbb{R}$　　$D>0$ の場合

$D=0$ については後で。

$D<0$

- **定理** 2 次正方行列 A の固有多項式

対角化の十分条件.

$$\Phi_A(\lambda) = (\lambda - \alpha)(\lambda - \beta)$$

に対して、$\alpha \neq \beta$ が成立するとする。このとき A は対角化可能です。すなわち正則行列 P が存在して $P^{-1}AP$ が対角行列になります。

- $A\vec{p}_1 = \alpha\vec{p}_1$、$A\vec{p}_2 = \beta\vec{p}_2$ で $\vec{p}_i \neq \vec{0}$ $(i = 1, 2)$

$\Phi_A(\alpha) = 0$

$\Phi_A(\beta) = 0$

$$\begin{aligned} A\begin{pmatrix}\vec{p}_1 & \vec{p}_2\end{pmatrix} &= \begin{pmatrix}A\vec{p}_1 & A\vec{p}_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\alpha\vec{p}_1 & \beta\vec{p}_2\end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix}\vec{p}_1 & \vec{p}_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha & 0 \\ 0 & \beta\end{pmatrix} \end{aligned}$$

$= P\begin{pmatrix}\alpha & 0 \\ 0 & \beta\end{pmatrix}$

P は正則か？

正則となる

$P^{-1}AP = \begin{pmatrix}\alpha & 0 \\ 0 & \beta\end{pmatrix}$

行列の対角化（一般論）(No.2)

- $P = (\vec{p}_1\ \vec{p}_2)$ の正則性

$\vec{p}_1 \nparallel \vec{p}_2$

$\Updownarrow$

定理 2 次正方行列 P に対して

$$P\text{は正則} \quad \Leftrightarrow \quad \det(P) \neq 0 \quad \Leftrightarrow \quad \left(P\vec{c} = \vec{0} \Rightarrow \vec{c} = \vec{0}\right)$$

$\Updownarrow$

$(c_1\vec{p}_1 + c_2\vec{p}_2 = \vec{0} \Rightarrow c_1 = c_2 = 0)$

- $c_1\vec{p}_1 + c_2\vec{p}_2 = \vec{0} \Rightarrow c_1 = c_2 = 0$ を示す。

$c_1 = 0$

$c_2\vec{p}_2 = \vec{0}$

$\vec{p}_2 \neq \vec{0}$

$c_2 = 0.$

$$c_1\vec{p}_1 + c_2\vec{p}_2 = \vec{0}$$

$(\beta I_2 - A)\cdot$

$$\to (\beta I_2 - A)(c_1\vec{p}_1 + c_2\vec{p}_2) = (\beta - \alpha)c_1\vec{p}_1 = \vec{0}$$

$= c_1(\beta\vec{p}_1 - \alpha\vec{p}_1)$

$\neq 0$

$$\to c_1\vec{p}_1 = \vec{0} \to c_1 = 0$$

$A\vec{p}_2 = \beta\vec{p}_2 \Leftrightarrow (\beta I_2 - A)\vec{p}_2 = \vec{0}$

$= c_1(\beta I_2 - A)\vec{p}_1 + c_2\boxed{(\beta I_2 - A)\vec{p}_2} = \vec{0}$

- **注意** $\vec{q} \neq \vec{0}$ ならば $\left(c\vec{q} = \vec{0} \Leftrightarrow c = 0\right)$

定理 $A \in M_n(\mathbb{R})$, $\alpha_1, \cdots, \alpha_l \in \mathbb{R}$, $\alpha_i \neq \alpha_j$ $(i \neq j)$

$A\vec{p}_j = \alpha_j \vec{p}_j$, $\vec{p}_j \neq \vec{0}$ $(j = 1, \cdots, l)$

$\Longrightarrow$ $\vec{p}_1, \cdots, \vec{p}_l$ は線形独立.

$c_1\vec{p}_1 + c_2\vec{p}_2 + \cdots + c_l\vec{p}_l = \vec{0}$

---

l に関する帰納法

$l = 2$ は OK.

固有多項式に関する注意

$A \longmapsto P^{-1}AP$

- **定理** P が正則ならば

$$\Phi_A(\lambda) = \Phi_{P^{-1}AP}(\lambda)$$

座標変換

$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix}$ で $\Phi(\lambda)$ は不変.

- 2 次正方行列 A, B に対して $\det(AB) = \det(A)\det(B)$ を用いる。
- $\det(P^{-1})\det(P) = \det(P^{-1}P) = \det(I_2) = 1$
-

$$\begin{aligned}
\Phi_{P^{-1}AP}(\lambda) = \det\big(\underbrace{\lambda I_2}_{= P^{-1}\lambda I_2 P} - P^{-1}AP\big) &= \det\left(P^{-1}\lambda I_2 P - P^{-1}AP\right) \\
&= \det\left(P^{-1}(\lambda I_2 - A)P\right) \\
&= \det(P^{-1})\det(\lambda I_2 - A)\det(P) \quad \det(P^{-1})\det(P) = 1. \\
&= \det(\lambda I_2 - A) \\
&= \Phi_A(\lambda)
\end{aligned}$$

固有多項式に関する注意 (No.2)–応用

- 正則行列 P により　　$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \gamma & 0 \\ 0 & \delta \end{pmatrix}$ と行列を対角化したとすると.

$$A = P \begin{pmatrix} \gamma & 0 \\ 0 & \delta \end{pmatrix} P^{-1} \quad \text{以下} \quad A_0 = \begin{pmatrix} \gamma & 0 \\ 0 & \delta \end{pmatrix}$$

と対角化されたら　　γ, δ は固有多項式の根になる.

$$\Phi_A(\lambda) = \cancel{\Phi_{PA_0P^{-1}}(\lambda) = \Phi_{A_0}(\lambda) = (\lambda-\gamma)(\lambda-\delta)}$$

$$\| $$

$$\Phi_{P^{-1}AP}(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda-\gamma & 0 \\ 0 & \lambda-\delta \end{vmatrix} = (\lambda-\gamma)(\lambda-\delta)$$

固有多項式に関する注意 (No.3)–応用

$$\Phi_A(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda-\alpha & -1 \\ 0 & \lambda-\alpha \end{vmatrix} = (\lambda-\alpha)^2$$

- $A = \begin{pmatrix} \alpha & 1 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}$ は対角化できない。
- $\Phi_A(\lambda) = (\lambda - \alpha)^2$ から、A が対角化可能ならば

$$A = P \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix} P^{-1} = P \cdot \alpha I_2 P^{-1} = \alpha I_2.$$

$$\begin{pmatrix} \alpha & 1 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}$$ これは矛盾

対角化できない.

$\Phi_A(\lambda) = (\lambda - \alpha)^2$, A: 対角化できるとする

$$P^{-1} A P = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}$$

$$\downarrow$$

$$A = P \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix} P^{-1}$$

$$= P \alpha I_2 P^{-1} = \alpha I_2$$

定理

$\Phi_A(\lambda) = (\lambda - \alpha)^2$, A: 対角化可能

$\Longrightarrow A = \alpha I_2$

Cayley-Hamilton の定理

A^n の計算. Toy Model.

- $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ に対して

定理

$$A^2 - \overbrace{(a+d)}^{\mathrm{tr}(A)}A + \det(A)\cdot I_2 = O_2$$

$\mathrm{tr}(A) = a + d = 1+3 = 4$

$-5 = \det(A) = 1\cdot 3 - 4\cdot 2$

- 具体例 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$ に対して $A^2 - 4A - 5I_2 = O_2$

$\Phi_A(\lambda)$
$= \lambda^2 - 4\lambda - 5$
$= (\lambda - 5)(\lambda + 1)$

固有値 $\lambda = 5, -1.$

$$A^2 - (5 + (-1))A + 5\cdot(-1)I_2 = O_2$$

$A^2 + A = 5A + 5I_2$

$A^2 - 5A = -A + 5I_2$

$= -(A - 5I_2)$

$$\to A(A + I_2) = 5(A + I_2), \quad A(A - 5I_2) = -(A - 5I_2)$$

$$\to A^n(A + I_2) = 5^n(A + I_2), \quad A^n(A - 5I_2) = (-1)^n(A - 5I_2)$$

$A^{n+1} + A^n$

$A^{n+1} - 5A^n$

$$\to 6A^n = 5^n(A + I_2) - (-1)^n(A - 5I_2)$$

$= \lambda^2 - (5 + (-1))\lambda + 5\cdot(-1).$ $\to$ $1/6$.

$$A(A+I_2) = 5(A+I_2)$$

$$A^2(A+I_2) = A \cdot 5(A+I_2)$$

$$= 5A(A+I_2)$$

$$= 5 \cdot 5(A+I_2)$$

$$= 5^2(A+I_2)$$

$$A^3(A+I_2) = \cdots$$

$$A^n(A+I_2) = 5^n(A+I_2)$$

$$A(A-5I_2) = -(A-5I_2)$$

$$\Downarrow$$

$$A^n(A-5I_2)$$

$$= (-1)^n(A-5I_2)$$

$f(\lambda) \in \mathbb{R}[\lambda] = a_m\lambda^m + \cdots + a_1\lambda + a_0$

$A \in M_2(\mathbb{R})$ に対して $f(A) = a_m A^m + \cdots + a_1 A + a_0 I_2$

$= \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

$\Phi_A(\lambda) = \lambda^2 - (a+d)\lambda + \det(A)$

C-H の定理 $\quad \Phi_A(A) = O_2.$

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

$$A^2 = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 + bc & \overset{b(a+d)}{\overset{\parallel}{ab + bd}} \\ \underset{(a+d)c}{\underset{\parallel}{ac + cd}} & bc + d^2 \end{pmatrix}$$

$$A^2 - (a+d)A = \begin{pmatrix} a^2 + bc & b\cancel{(a+d)} \\ c\cancel{(a+d)} & bc + d^2 \end{pmatrix}$$

$$- \begin{pmatrix} \overset{a^2+ad}{\overset{\parallel}{a(a+d)}} & b\cancel{(a+d)} \\ c\cancel{(a+d)} & \underset{ad+d^2}{d(a+d)} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} bc - ad & 0 \\ 0 & bc - ad \end{pmatrix} = (bc - ad)\, I_2 .$$

Cayley-Hamilton の定理–その応用

$A \in M_2(\mathbb{R})$ $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ でもOK.

和学ωるるつつD.

- 2 次正方行列 A の固有値 α, β が $\alpha \neq \beta$

$$\to \quad A^2 - (\alpha+\beta)A + \alpha\beta I_2 = O_2$$

$$\to A(A - \alpha I_2) = \beta(A - \alpha I_2), \quad A(A - \beta I_2) = \alpha(A - \beta I_2)$$

$$\to A^n(A - \alpha I_2) = \beta^n(A - \alpha I_2), \text{ -①} \quad A^n(A - \beta I_2) = \alpha^n(A - \beta I_2) \text{ -②}$$

① - ②

$$\to (\beta - \alpha)A^n = \beta^n(A - \alpha I_2) - \alpha^n(A - \beta I_2) \leftarrow$$

$$\to A^n = \frac{\beta^n}{\beta - \alpha}(A - \alpha I_2) - \frac{\alpha^n}{\beta - \alpha}(A - \beta I_2)$$

$\frac{1}{\beta - \alpha}$.

$\alpha = \beta a$ と王とか?

別の解法

λ^n を $\Phi_A(\lambda)$ で割る.

Cayley-Hamilton の定理–その応用

- 2 次正方行列 A の固有値 $\alpha,\ \beta$ が $\alpha \neq \beta$

$$A^2 - (\alpha + \beta)A + \alpha\beta I_2 = O_2$$

$$\to A(A - \alpha I_2) = \beta(A - \alpha I_2), \quad A(A - \beta I_2) = \alpha(A - \beta I_2)$$

$$\to A^n(A - \alpha I_2) = \beta^n(A - \alpha I_2), \quad A^n(A - \beta I_2) = \alpha^n(A - \beta I_2)$$

$$\to (\beta - \alpha)A^n = \beta^n(A - \alpha I_2) - \alpha^n(A - \beta I_2)$$

$$\to A^n = \frac{\beta^n}{\beta - \alpha}(A - \alpha I_2) - \frac{\alpha^n}{\beta - \alpha}(A - \beta I_2)$$