関数の凹凸と２階微分

戸瀬　信之

ITOSE PROJECT

V00 May, 2018 emath
V01 Oct 26, 2020 CalcNT

$U \subset \mathbb{R}^2$ 開

$f : U \to \mathbb{R}.$

$P_0 \in U$ で f は極大(小)

$\Downarrow$　$\Uparrow$

$f_x(P_0) = f_y(P_0) = 0.$

必ずしも成立しない.

停留点が極大(小)となる条件

1変数の場合

定理

2階微分できて、f'' 連続.

- 開区間 (A, B) 上の C^2 級関数 $f: (A, B) \longrightarrow \mathbf{R}$
- 前提：$f''(t) > 0 \quad (t \in (A, B))$

このとき不等式

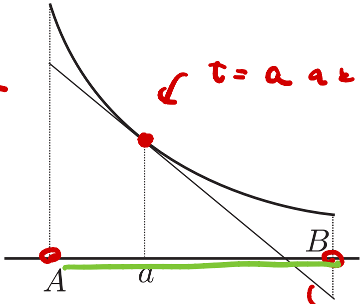
$$f(t) > f(a) + f'(a)(t-a) \quad (t \neq a)$$

$t=a$ のとき "="

接線.

$y = f'(a)(t-a)$

$+ f(a)$



特に $f'(a)=0$

$f(t) > f(a) \quad (t \neq a)$

〜> $t=a$ で f は最小.

証明（その１）

- $F(t) := f(t) - f(a) - f'(a)(t-a)$ とする。
- $F'(t) = f'(t) - f'(a)$, $F''(t) = f''(t) > 0$
- $G'(t) > 0 \ (t \in (A, B))$ とすると

  $$A < s < t < B \Rightarrow G(s) < G(t)$$

  G = F'

- これを用いると $A < s < a < t < B \Rightarrow F'(s) < F'(a) = 0 < F'(t)$
- 増減表

t		a	
F'	$-$	0	$+$
F	$\searrow$	0	$\nearrow$

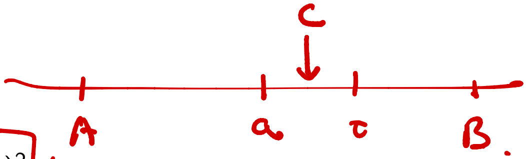
から $F(t) > 0 \quad (t \neq a)$

平均値の定理から示す。

f'(a) − f'(a)

A s a t B

別の証明（Taylor の定理を用いる）



- $t \neq a$ とする。Taylor の定理を用いると
- $f(t) = f(a) + f'(a)(t-a) + \boxed{\frac{1}{2}f''(c)(t-a)^2}$ を満たす c が t と a の間に存在する

> 0　剰余項.

- このとき $f''(c) > 0$ と $(t-a)^2 > 0$ から

$$f(t) > f(a) + f'(a)(t-a)$$

応用（極大・極小の判定）

f'' 各点連続

A　$t=a$　B.

定理

- C^2 級の関数 $f : (A, B) \to \mathbf{R}$
- $t = a \in (A, B)$ において $f'(a) = 0$, $f''(a) > 0$ (resp. $f''(a) < 0$) とする。
- このとき f は $t = a$ で極小（resp. 極大）

neighborhood.
近傍.

(証明の準備—連続関数の性質)

$f''(a) > 0$

$G : (A, B) \to \mathbf{R}$ が連続とする。また $a \in (A, B)$ において $G(a) > 0$ とする。このとき, ある正数 $\delta > 0$ に対して

$$G(t) > 0 \quad (t \in (a - \delta, a + \delta))$$

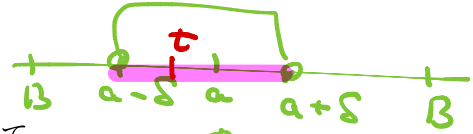
$a-\delta$　a　$a+\delta$

（証明は後述）

$G = f''$ として使う.

a の近くで G は正.

証明



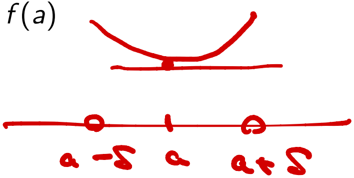
- $f''(t)$ が連続であるので、ある正数 $\delta > 0$ に対して

$f'(a) = 0$

$$f''(t) > 0 \quad (a - \delta < t < a + \delta)$$

- このとき、定理を区間 $(a - \delta, a + \delta)$ において用いると $t \neq a$ を満たす $t \in (a - \delta, a + \delta)$ に対して

$$f(t) > f(a) + \underbrace{f'(a)}_{=0}(t - a) = f(a)$$



→ f は t=a で極小.

連続関数の性質—証明

$\exists\delta>0\ (f(t)>0\ (t\in(a-\delta,a+\delta)))$

結論を論理的に書くと

$$\exists\delta>0\ \forall t\in(a-\delta,a+\delta)\quad f(t)>0$$

となりますが，これを否定すると

↓否定.

$$\forall\delta>0\ \exists t\in(a-\delta,a+\delta)\quad f(t)\le 0$$

n : 自然数.

特に $\delta=\frac{1}{n}$ とします．このとき

$$\exists t_n\ \boxed{a-\frac{1}{n}<t_n<a+\frac{1}{n}}\ \text{AND}\ f(t_n)\le 0$$

はさみうちの定理から $t_n\to a\ (n\to+\infty)$ となり，f の連続性から

$$\cancel{0\le}\ f(t_n)\to f(a)\le 0\ (\text{矛盾})$$

前提 $f(a)>0$

2変数の場合

- $\mathbf{R}^2$ の開集合 U 上の関数 $f: U \to \mathbf{R}$ を考える。
- $\mathrm{P}_0(a,b) \in U$、${}^t(\xi\ \eta) \neq \vec{0}$ に対して
  $F(t) = f(a + t\xi, b + t\eta)$
- (**Chain Rule**) $G(t) = f(x(t), y(t))$ に対して
  $G'(t) = f_x(x(t), y(t))x'(t) + f_y(x(t), y(t))y'(t)$
- $F'(t) = f_x(P_t) \cdot \xi + f_y(P_t) \cdot \eta$

$$
\begin{aligned}
F''(t) &= \xi\,(f_{xx}\xi + f_{xy}\eta) + \eta\,(f_{yx}\xi + f_{yy}\eta) \\
&= f_{xx}\xi^2 + 2f_{xy}\xi\eta + f_{yy}\eta^2
\end{aligned}
$$

U

P_t

$P_0(a, b)$

$P_t(a+\xi t, b+\eta t)$

$\begin{pmatrix}\xi \\ \eta\end{pmatrix} \neq \vec{0}$

$+\begin{pmatrix}\xi \\ \eta\end{pmatrix}$

$= f(P_t)$

ξ, η の 2次式

by Young

$f_{xy} = (f_x)_y$

$f_{yx} = (f_y)_x$

Hesse 行列

- $P \in U$ に対して Hesse 行列

$$H(f)(P) = \begin{pmatrix} f_{xx}(P) & \boxed{f_{xy}(P)} \\ \boxed{f_{yx}(P)} & f_{yy}(P) \end{pmatrix}$$

- f が C^2 級のとき $f_{xy} = f_{yx}$ ですから H は対称行列 by Young.
- $F(t) = f(a + t\xi, b + t\eta)$ に対して

H(f)(P) の2次式 が正定値

$$F''(t) = \left(H(f)(P_t) \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} \right) > 0 \quad \left(\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} \neq \vec{0} \right)$$

$\iff f_{xx}(P) > 0, \ \det(H(f)(P)) > 0.$

2変数の（狭義）凸関数

f_x, f_y, f_{xx} が存在

f, ——— が連続.

(x, y)

$P_0(a, b)$ $\in U$

定理

- $\mathbf{R}^2$ の凸開集合 U 上の C^2 級関数 $f: \ U \longrightarrow \mathbf{R}$
- $f_{xx}(P) > 0$, $\det(H(f)(P)) > 0$ $(P \in U)$ とする。このとき $(x, y) \neq (a, b)$ ならば $\in U$

$$f(x, y) > \boxed{f(a, b) + f_x(a, b)(x - a) + f_y(a, b)(y - b)}$$

$P, Q \in U \Rightarrow \overline{PQ} \subset U$

P Q

(a, b) における f の 接平面

$z = f(a, b) + f_x(a, b)(x - a) + f_y(a, b)(y - b)$

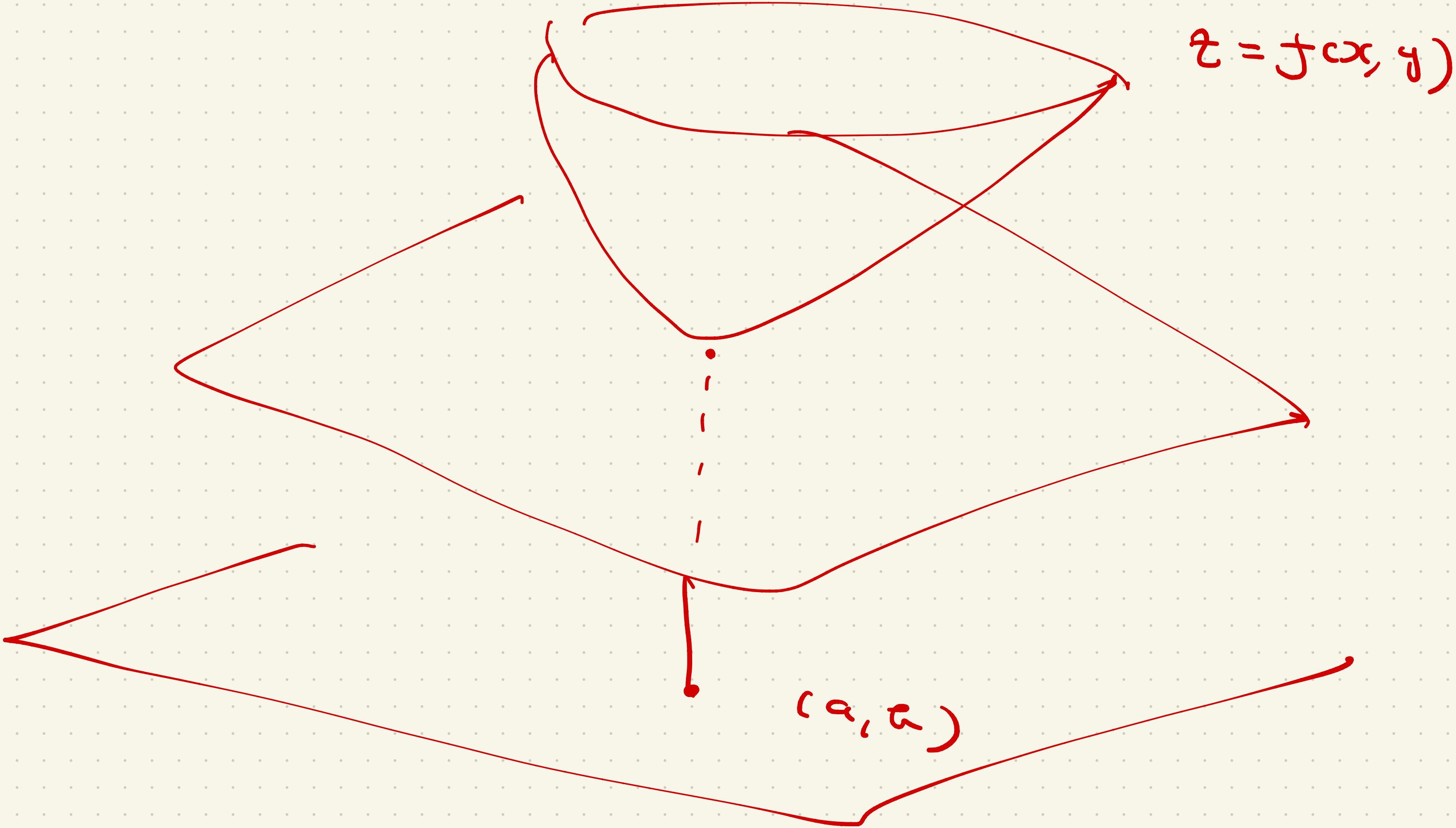
(a,b) が f の停留点のとき i.e.

$f_x(a,b) = f_y(a,b) = 0$ のとき.

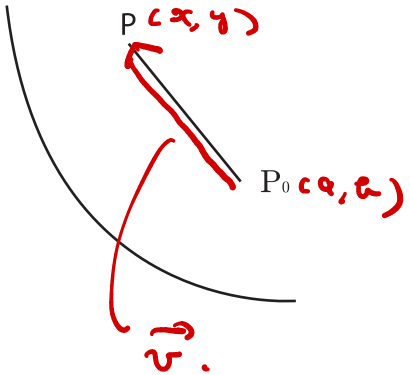
$$\longrightarrow \quad f(x,y) > f(a,b) \quad \left(\begin{array}{l} (x,y) \neq (a,b) \\ (x,y) \in U \end{array} \right)$$

$\longrightarrow$ (a,b) で f は極小値をとる

(a,b) は唯一の極小点.


z = f(x, y)
(a, b)

証明の準備



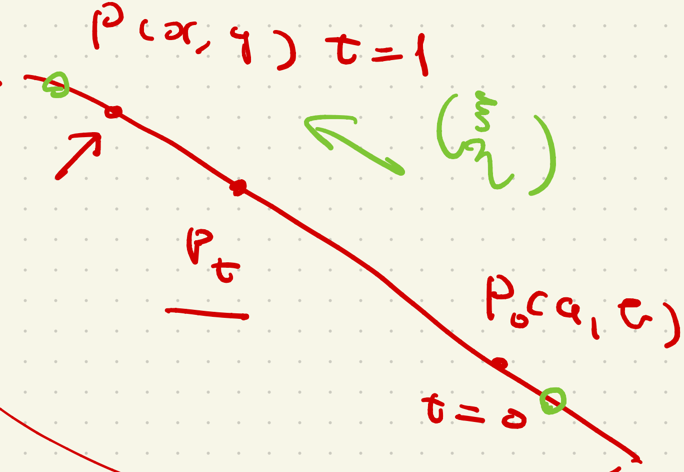
- （証明の準備）$\mathrm{P}(x, y)$ と $\mathrm{P}_0(a, b)$ に対して $\mathrm{P} \neq \mathrm{P}_0$ とする。そして

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x - a \\ y - b \end{pmatrix} \neq \vec{0}$$

証明

- $F(t) = f(a + t\xi, b + t\eta)$ に Taylor の定理を適用
- $F(1) - F(0) = F'(0) \cdot 1 + \frac{1}{2}F''(c) \cdot 1^2$
  を満たす c が 0 と 1 の間に存在する。
- $f(x, y) - f(a, b) = f_x(a, b)\xi + f_y(a, b)\eta + \frac{1}{2}(H(f)(P_c)\vec{v}, \vec{v})$
- $\vec{v} \neq \vec{0}$ ですから $(H(f)(P_c)\vec{v}, \vec{v}) > 0$
- $f(x, y) - f(a, b) > f_x(a, b)\xi + f_y(a, b)\eta$

$P_t\,(a+(x-a)t,\ b+(y-b)t)$



$F(t)=f(P_t)$ とすると

$$F''(t)>0$$

$$F(t) > F(0)+F'(0)(t-0),\quad t\neq 0.$$

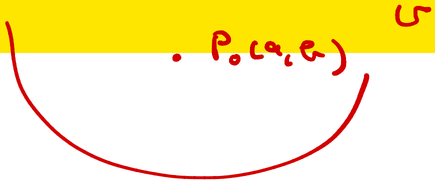
特に $t=1$ とすると

$$F(1) > F(0)+F'(0).$$

〃 $f_x(P_0)\cdot\xi + f_y(P_0)\eta$

$$f(x,y) > f(a,b) + f_x(a,b)(x-a) + f_y(a,b)(y-b)$$

極大・極小の判定



$\mathbf{R}^2$ の開集合 U 上の関数 $f: U \to \mathbf{R}$

（復習）

f が $(a,b) \in U$ で極小・極大ならば $f_x(a,b) = f_y(a,b) = 0$

このとき (a,b) を f の**停留点**という。停留点が極大・極小になる十分条件を与える。

定理

f: U 上 C^2 級 → f_{**} 連続

$(a,b) \in U$ が $f_x(a,b) = f_y(a,b) = 0$ を満たす。

$f_{xx}(a,b) > 0$, $f_{xx}(a,b)f_{yy}(a,b) - f_{xy}(a,b)^2 > 0$ ⟷ $(H(f)(a,b)$ は正定値$)$

から定まる2次形式.

$\|$

f は $\det(H(f)(a,b))$

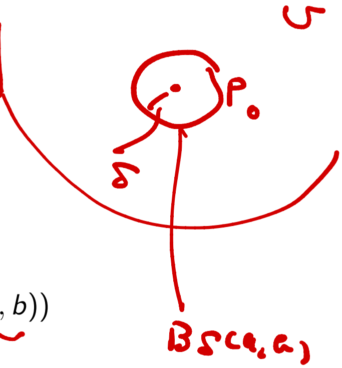
このとき (a,b) で極小となる。

証明のために必要な連続関数の性質

$$\boxed{P_e \to P_0(a,b) \Rightarrow f(P_e) \to f(P_0)}$$

- $\mathbf{R}^2$ の開集合 U 上の関数 $G: \ U \longrightarrow \mathbf{R}$ は連続とする
- $(a,b) \in U$ に対して $G(a,b) > 0$ とする。 仮定
- このとき正数 $\delta > 0$ が存在して

$$G(x,y) > 0 \quad ((x,y) \in B_\delta(a,b))$$



証明

$\exists \delta_1 > 0$ $\exists \delta_2 > 0$

f_{xx} 連続

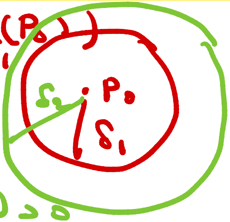
$\Downarrow$

- f_{xx} と $f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2$ は連続です。
- $f_{xx}(x, y) > 0$ $((x, y) \in B_\delta(a, b))$
  $f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2 > 0$ $((x, y) \in B_\delta(a, b))$
  を満たす正数 $\delta > 0$ が存在。
- 凸性の定理を用いると $(x, y) \in B_\delta(a, b)$ が $(x, y) \neq (a, b)$ ならば

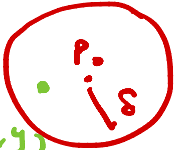
$f_{xx}(P) > 0$ $(P \in B_{\delta_1}(P_0))$

$f_{xx}(P) f_{yy}(P) - f_{xy}^2(P) > 0$ $(P \in B_{\delta_2}(P_0))$

$0 < \delta = \min(\delta_1, \delta_2)$



凸



$$
\begin{aligned}
f(x, y) &> f(a, b) + \underbrace{f_x(a, b)}_{=0}(x - a) + \underbrace{f_y(a, b)}_{=0}(y - b) \\
&= f(a, b)
\end{aligned}
$$

Q: $B_\delta(P_0)$ が凸を示せ.