偏微分係数と極大・極小の必要条件

微分積分 2020 L01, Part 1–Part 4

Nobuyuki TOSE

Oct 05, 2020

プラン

Part 01 ミクロ経済学における基本的な問題 入門.

Part 02 開集合 ↔ 開区間.

Part 03 極大・極小と停留点（極大・極小の必要条件）

Part 04 クラメールの公式

Part 01

ミクロ経済学における基本的な問題

ミクロ経済学における基本的な問題

ミクロ経済学では最初に以下の基本的な問題を学びます.

- 生産理論 (Production Theory)
- 消費者理論 (Consumer Theory)

生産理論（Production Theory）(1)

(原料

生産物 (product)C が**生産要素** (production elements) A,B から生産されるとします．A, B, C の価格はそれぞれ p, q, r とします．A と B をそれぞれ x と y 投入するとき C が $z = f(x, y)$ 得られるとします． モデル.
このとき $f(x, y)$ を**生産関数** (production function) と呼ばれます．またこの状況で**利潤関数** (profit function) を

$$\pi(x, y) = rf(x, y) - px - qy$$

と定義します.
生産理論の最初のステップは，利潤関数 $\pi(x, y)$ を最大化して**生産要素需要関数**

$$x = x(p, q, r), y = y(p, q, r)$$

を求めることにあります.

生産理論（Production Theory）(2)

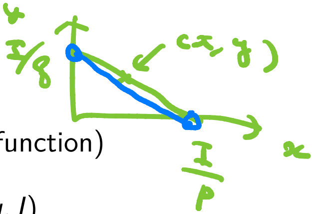
	生産要素			生産物
	A	B	$\rightarrow$	C
価格	p	q		r
量	x	y		$z = f(x, y)$

投入量.　　生産量

生産関数.

消費者理論（Consumer Theory）(1)

商品 (Goods) A,B があるとします．A を x, B を y 購入するとき，消費者が**効用関数** (utility function)$u(x, y)$ の効用を得るとします．さらに A, B の価格が p, q であるとします．
消費者が予算 I を全額消費して A,B を購入するとします．ここでの問題は**予算制約**と呼ばれる制約条件



$$I - px - qy = 0$$

の下で $u(x, y)$ を最大化して**需要関数** (demand function)

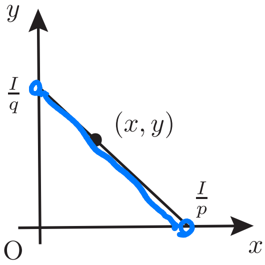
$$x = x(p, q, I), y = y(p, q, I)$$

と**所得の限界効用** (mariginal utility of income)

Lagrange の未定乗数.

$$\lambda = \lambda(p, q, I)$$

を得ることです．


y
$\frac{I}{q}$
(x, y)
$\frac{I}{p}$
O
x

(A, B)の各点の周りが(A, B)に含まれている

Part 02

開集合

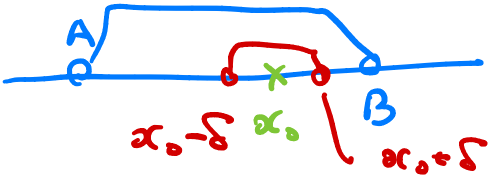
開区間

$]A, B[$

$\forall x_0 \in (A, B)$

$\exists \delta > 0$

$(x_0-\delta, x_0+\delta) \subset (A, B)$



開円盤 CT 246p

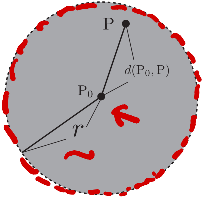
開円盤 (Open Disc)

radius 半径.

$r > 0$, $\mathrm{P}_0(a, b) \in \mathbf{R}^2$ に対して

P と P_0 の距離.

$$B_r(\mathrm{P}_0) := \{\mathrm{P} \in \mathbf{R}^2;\ d(\mathrm{P}, \mathrm{P}_0) < r\}$$



を中心 P_0, 半径 $r > 0$ の**開円盤**と呼びます．ここで $d(\mathrm{P}_0, \mathrm{P})$ は 2 点 P_0, P の距離です．$\mathrm{P}(x, y)$ のとき

$$d(\mathrm{P}_0, \mathrm{P}) = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2}$$

ユークリッド距離.

注意今後「P_0 の近くで〜」という言い方をしますが，これはある正数 $r > 0$ に対して

が存在し

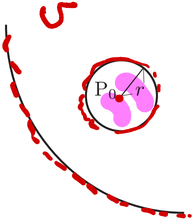
任意の$\mathrm{P} \in B_r(\mathrm{P}_0)$において〜

Definition

$\mathbf{R}^2$ の部分集合 U があるとします．U が開集合であるとは任意の $\mathrm{P}_0 \in U$ に対して $r > 0$ が存在して

$$B_r(\mathrm{P}_0) := \{\mathrm{P} \in \mathbf{R}^2;\ d(\mathrm{P}, \mathrm{P}_0) < r\} \subset U$$

が成立することです．



注意 U の任意の点 P_0 の周りが U に含まれているということです．

命題・命題関数 (1)

命題とは真偽が明らかな文のことです．例えば

$$
\begin{array}{ll}
2 > 1 & \text{真（Truth）} \\
1 > 2 & \text{偽（False）}
\end{array}
$$

集合 X 上の**命題関数**とは $x \in X$ に対して命題 $P(x)$ を対応させるものです．例えば $X = \mathbf{R}$ のとき

$$P(x): \quad 1 < x$$

と定めると

$x=0$　$x=2$

$$
\begin{array}{lll}
P(0): & 1 < 0 & \text{偽} \\
P(2): & 1 < 2 & \text{真}
\end{array}
$$

となります．

$\exists x \in X (P(x))$ は真

$\forall x \in X (P(x))$ は偽

命題・命題関数 (2)

集合 X 上の命題関数 $P(x)$ があるとき付随して命題を定めることができます.

$$\forall x \in X\,(P(x))$$

はすべての $x \in X$ に対して $P(x)$ が真であるという命題です．前ページの例では $P(0)$ が偽ですから $\forall x \in X\,(P(x))$ は偽です.
さらに

$$\exists x \in X\,(P(x))$$

はある $x \in X$ に対して $P(x)$ が真であるという命題です．前ページの例では $P(2)$ が真ですから $\exists x \in X\,(P(x))$ は真です.

命題・命題関数 (3)—重要な公式

集合 X 上の命題関数 $P(x)$ に対して

同値.

常に左右の真偽が一致.

$$NOT\,(\forall x \in X\ \ P(x)) \equiv \exists x \in X\ \ NOT\,(P(x))$$

$$NOT\,(\exists x \in X\ \ P(x)) \equiv \forall x \in X\ \ NOT\,(P(x))$$

開集合の例 (1)

$\forall P_0 \in \mathbb{R}^2$

$\exists r > 0$

$\forall r > 0$

$B_r(P_0) \subset \mathbb{R}^2.$

P_0

$r > 0$

以下の $\mathbf{R}^2$ の部分集合は開集合です.

- $\mathbf{R}^2$
- 上半平面

$$U_1 := \{(x, y) \in \mathbf{R}^2;\ y > 0\}$$

$(a, b) \in U_1,\quad b > 0$

$r = \frac{b}{2} > 0$

$B_{\frac{b}{2}}((a, b)) \subset U_1$

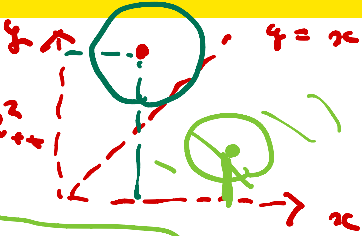
$y = 0$

開集合の例 (2)

$P_0(a,b) \in \mathbb{R}^2_{++}$

$b \geq a$ の場合 $B_{\frac{a}{2}}(P_0) \subset \mathbb{R}^2_{++}$

$b \leq a$



- 第 1 象限（1st Quadrant）

$$\mathbf{R}^2_{++} := \{(x,y) \in \mathbf{R}^2;\ x,y > 0\}$$

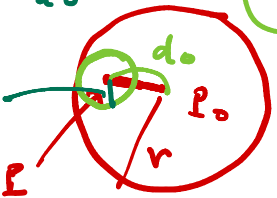
$B_{\frac{b}{2}}(P_0) \subset \mathbb{R}^2_{++}$

- 開円盤

$P \in$

$$B_r(\mathrm{P}_0) := \{\mathrm{P} \in \mathbf{R}^2;\ d(\mathrm{P},\mathrm{P}_0) < r\}$$

$r - d_0 = \delta$



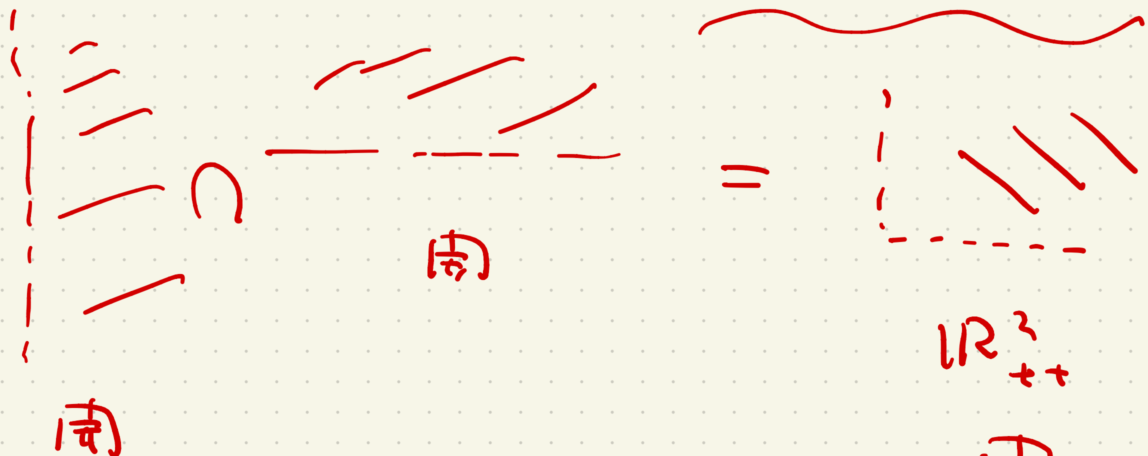
$d_0 = d(P, P_0) < r.$

$\delta = r - d_0$

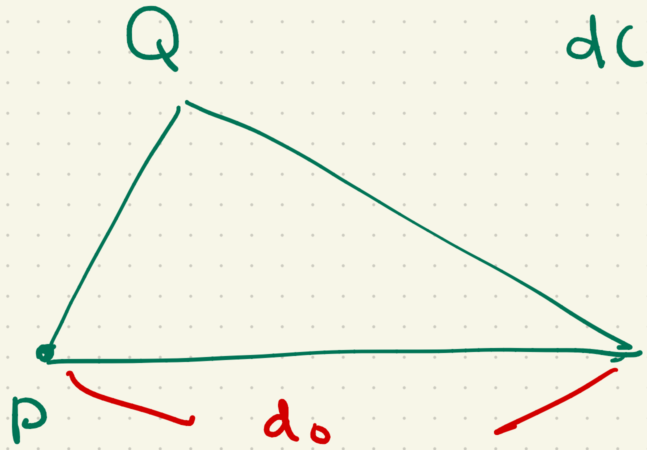
$B_\delta(P) \subset B_r(P_0)$

$U_1, U_2 \subset \mathbb{R}^2$, 開 $\Longrightarrow$ $U_1 \cup U_2$ 開

$U_1 \cap U_2$ 開



$Q \in B_\delta(P)$



$$
\begin{aligned}
d(Q, P_0) &\le d(Q, P) + d(P, P_0) \\
&< \delta + d_0 \\
&= r - d_0 + d_0 \\
&= r
\end{aligned}
$$

$Q \in \boxed{B_r(P_0)}$

$P_0 \in U_1$

$P_0 \in U_2$

U_1, U_2 が $\mathbf{R}^2$ の開集合ならば $U_1 \cap U_2$ も開集合である.

$P_0 \in U_1 \cap U_2$

考えるといい.

$\exists \delta_1 > 0 \quad \exists \delta_2 > 0$

$B_{\delta_1}(P_0) \subset U_1$

$B_{\delta_2}(P_0) \subset U_1$

$0 < \delta = \min(\delta_1, \delta_2)$ "

$B_\delta(P_0)$

$\rightarrow B_{\delta_1}(P_0) \cap B_{\delta_2}(P_0) \subset U_1 \cap U_2$

「開集合でない」とは(1)

$F \subset \mathbf{R}^2$ に対して

$$
\begin{aligned}
F\text{は開集合でない} &\equiv NOT\ \boxed{(\forall \mathrm{P}_0 \in F\ \exists r > 0\ B_r(\mathrm{P}_0) \subset F)} \\
&\equiv \exists \mathrm{P}_0 \in F\ NOT\,(\exists r > 0\ B_r(\mathrm{P}_0) \subset F) \\
&\equiv \exists \mathrm{P}_0 \in F\ \forall r > 0\ NOT\,(B_r(\mathrm{P}_0) \subset F) \\
&\equiv \exists \mathrm{P}_0 \in F\ \forall r > 0\ B_r(\mathrm{P}_0) \not\subset F
\end{aligned}
$$

「開集合でない」とは (2)

X の部分集合 A,B に対して

$$A \subset B \equiv \forall a \in A\,(a \in B)$$

なので

$$A \not\subset B \equiv \exists a \in A\ NOT\,(a \in B) \equiv \exists a \in A\,(a \notin B)$$

従って

$$F\text{は開集合でない} \equiv \exists \mathrm{P}_0 \in F\ \forall r > 0\ \exists \mathrm{P} \in B_r(\mathrm{P}_0)\,(\mathrm{P} \notin F)$$

開集合–反例 (1)

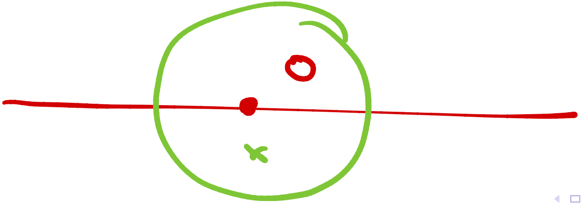
fermé 閉じている. $\not\ni \{P_0\}$ Q

$r>0$ P_0

以下の $\mathbf{R}^2$ の部分集合は開集合ではありません.

- $\mathrm{P}_0 \in \mathbf{R}^2$ のなす集合 $\{\mathrm{P}_0\}$
- 閉上半平面

$$F_1 := \{(x,y) \in \mathbf{R}^2;\ y \geq 0\}$$

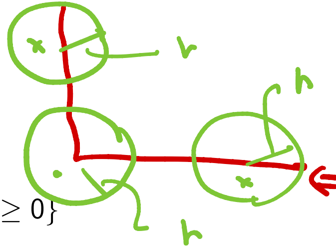


$\forall r>0$

$(0,-\frac{r}{2}) \notin F_1$

$\in B_r(0)$

開集合–反例 (2)

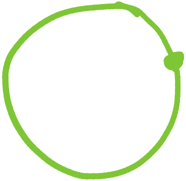


- 閉第 1 象限

$$\overline{\mathbf{R}^2_{++}} := \{(x, y) \mathbf{R}^2;\ x, y \geq 0\}$$

- 閉円盤

$$\overline{B_r(\mathrm{P}_0)} := \{\mathrm{P} \in \mathbf{R}^2;\ d(\mathrm{P}, \mathrm{P}_0) \leq r\}$$



閉 = 境界を含む.

Part 03
偏微分係数と極大・極小

$\exists r > 0$ $B_r(P_0) \subset U$

$\mathbf{R}^2$ の開集合 U 上の関数

$$f: \ U \to \mathbf{R}$$

が定義されているとします.

$\mathrm{P}_0(a, b) \in U$ に対して x の関数

$x = a$

$$F(x) := f(x, b)$$

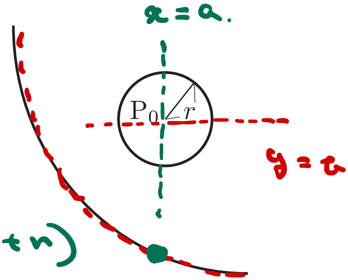
$(a-r < x < a+r)$

を $x = a$ の近くで定義できます. さらに y の関数

$$G(y) := f(a, y) \quad (b-r < y < b+r)$$

を $y = b$ の近くで定義することができます.

$y = b.$



この状況で，定義の中の極限が存在すれば，x と y に関する**偏微分係数**を

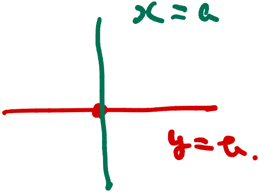
$$f_x(a,b) := F'(a) = \lim_{x\to a} \frac{f(x,b)-f(a,b)}{x-a}$$

$$f_y(a,b) := G'(b) = \lim_{y\to b} \frac{f(a,y)-f(a,b)}{y-b}$$

と定義できます．

$\vec{v}$ とる
方向微分する.

Partial Differentiation-An example



$\mathbf{R}^2$ 上の関数

$$f(x,y) = x^3 + 2xy^2 + y^3$$

について考えます．$(a,b) \in \mathbf{R}^2$ の周りで考えるとして

$$F(x) := f(x,b) = x^3 + 2xb^2 + b^3, \quad G(y) := f(a,y) = a^3 + 2ay^2 + y^3$$

と定義します．このとき

$$F'(x) = 3x^2 + 2b^2, \quad \text{and} \quad G'(y) = 4ay + 3y^2$$

から

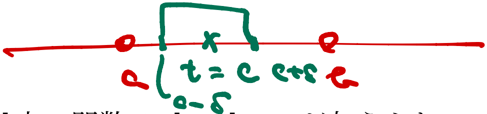
$$f_x(a,b) = 3a^2 + 2b^2, \quad f_y(a,b) = 4ab + 3b^2$$

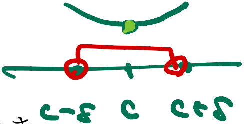
$\| \; F'(a)$

$\| \; G'(b)$

を得ます．

1 変数の極大点（極小点）–定義





開区間 $]a, b[$ 上の関数 $f :]a, b[\Rightarrow \mathbf{R}$ が与えられているとき

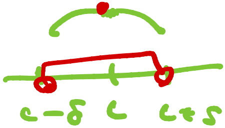
f が $t = c$ で極小（resp. 極大）

$\Leftrightarrow$ ある $\delta > 0$ に対して f が $]c - \delta, c + \delta[$ 上最小（resp. 最大）

$\Leftrightarrow$ ある $\delta > 0$ に対して

$$f(t) \geq f(c) \quad (c - \delta < t < c + \delta)$$

$$\text{resp.} f(t) \leq f(c) \quad (c - \delta < t < c + \delta)$$



t=c の近くで最小（大）$\Longleftrightarrow$ t=c で極小（大）

a c b

微分可能な 1 変数関数の極小点（極大点）に関する次の定理を紹介します.

Theorem

微分可能な関数 $f :]a,b[\to \mathbf{R}$ があるとします. f が $c \in]a,b[$ で極小（極大）ならば

$$f'(c) = 0$$

注意 これは中身を理解して欲しい定理です.

極小の場合

c

$t < c$

$t \to c$

$f'(c) \leq 0$

$$\frac{\boxed{f(t)-f(c)}}{t-c} \quad \geq 0$$

≤ 0 ≥ 0

≤ 0 ≥ 0

$t > c$

$t \to c$

$t \to c+0$

$f'(c) \geq 0$

Minimal (Maximal) Points CT 268p

$P_0(a,b)$の近くで最小. ⟷ 極小.
大　　　　　　大.

$\mathbf{R}^2$ の開集合 U 上の関数

$$f: \ U \to \mathbf{R}$$

に対して，f が $\mathrm{P}_0(a,b)$ で極小（resp. 極大）であるとはある $\delta > 0$ が存在して

$$f(x,y) \geq f(a,b) \quad ((x,y) \in B_\delta(\mathrm{P}_0))$$

(resp.

$$f(x,y) \leq f(a,b) \quad ((x,y) \in B_\delta(\mathrm{P}_0))$$

)
が成立するときです.

Minimal (Maximal) Points–Theorem CT 269p

$\mathbf{R}^2$ の開集合 U 上の関数

$$f:\ U \to \mathbf{R}$$

が U の各点 $\mathrm{P} \in U$ で x, y について偏微分できると仮定します.

$\cdot\ P_0(a,b)$

U

Theorem

f が $\mathrm{P}_0(a,b) \in U$ で極小（極大）ならば

$$f_x(a,b) = f_y(a,b) = 0 \tag{1}$$

が成立します.

この状況で (1) を満たす点 $\mathrm{P}_0(a,b)$ を f の**停留点**と呼びます.

(stationary pt.)

Minimal (Maximal) Points–Sketch of proof

f が $\mathrm{P}_0(a,b)$ で極小とします．このとき $F(x)=f(x,b)$ は $x=a$ で極小となります．実際

$$f(x,y)\geq f(a,b)\quad ((x,y)\in B_\delta(\mathrm{P}_0))$$

∃δ>0 でok.

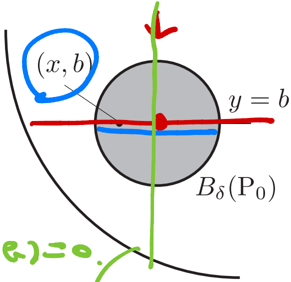
から $f(x,b)\geq f(a,b)\quad (a-\delta<x<a+\delta)$ 従って

$$F(x)\geq F(a)\quad (a-\delta<x<a+\delta)$$

となります．よって

$$F'(a)=0\quad 従って\quad f_x(a,b)=0$$

であることが分かります．



$F'(a)=0.$

$F(y)\geq F(a)$

$(a-\delta<y<a+\delta)$

$x=a$ に固定

Minimal (Maximal) Points–An example

関数

$$f(x,y) = x^2 + \overset{\substack{4y\cdot x \\ \shortparallel}}{4xy} + 2y^2 - 6x - 8y$$

$= 4x\cdot y$

について考えます.

$$\begin{aligned} f_x(x,y) &= 2x + 4y\cdot 1 + 0 - 6 - 0 \\ &= 2x + 4y - 6 = 0 \\ f_y(x,y) &= 0 + 4x\cdot 1 + 4y - 0 - 8 \\ &= 4x + 4y - 8 = 0 \end{aligned}$$

$2x+4y=6$

$4x+4y=8$

$$\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 4 \end{vmatrix} = 8-16 = -8 < 0$$

を解くと，$(x,y) = (1,1)$ が f の唯一の停留点であることが分かります.

極大 or 極小 どちらでもない

Part 04
クラメールの公式

連立 1 次方程式

$$\begin{cases} ax + by = \alpha & \cdots (1) \\ cx + dy = \beta & \cdots (2) \end{cases}$$

を考える． y を消去するために $(1)\times d-(2)\times b$ を考える．

$$\begin{array}{rcccl} & adx & + \cancel{bdy} & = & \alpha d \\ -) & bcx & + \cancel{bdy} & = & \beta b \\ \hline & (ad-bc)x & & = & \alpha d-\beta b \end{array}$$

$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} x$

$= \begin{vmatrix} \alpha & b \\ \beta & d \end{vmatrix}$

x を消去するために $(1)\times c-(2)\times a$ を考える．

$$\begin{array}{rcccl} & \cancel{acx} & + bcy & = & \alpha c \\ -) & \cancel{acx} & + ady & = & \beta a \\ \hline & & (bc-ad)y & = & \alpha c-\beta a \end{array}$$

$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} y$

$= \boxed{(ad-bc)y} = \beta a-\alpha c$

$= \begin{vmatrix} a & \alpha \\ c & \beta \end{vmatrix}$

行列式・クラメールの公式

行列式

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

これを用いると

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} x = \begin{vmatrix} \alpha & b \\ \beta & d \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} y = \begin{vmatrix} a & \alpha \\ c & \beta \end{vmatrix}$$

特に $D := \left|\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right| \neq 0$ のとき

係数行列式.

$$x = \frac{1}{D}\begin{vmatrix} \alpha & b \\ \beta & d \end{vmatrix}, \quad y = \frac{1}{D}\begin{vmatrix} a & \alpha \\ c & \beta \end{vmatrix}$$

これが解になる.

これを**クラメールの公式**と言います.

逆行列でやる.
であることを示す.

クラメールの公式–例

$$\begin{cases} 2x + 4y = 6 \\ 4x + 4y = 8 \end{cases}$$

を解きます.

$$D = \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 4 \end{vmatrix} = 2 \cdot 4 - 4 \cdot 4 = -8 \neq 0$$

からクラメールの公式が適用できます．実際

$$x = -\frac{1}{8}\begin{vmatrix} 6 & 4 \\ 8 & 4 \end{vmatrix} = -\frac{1}{8}(6 \cdot 4 - 8 \cdot 4) = -\frac{1}{8}(-8) = 1$$

$$y = -\frac{1}{8}\begin{vmatrix} 2 & 6 \\ 4 & 8 \end{vmatrix} = -\frac{1}{8}(2 \cdot 8 - 4 \cdot 6) = -\frac{1}{8}(-8) = 1$$

クラメールの公式の演習は大事.