I　$\forall \vec{v} \in \mathbb{K}^n$ に対して

$$\vec{v} = P_1\vec{v} + P_2\vec{v} + P_3\vec{v}$$

となりますが　$P_j\vec{v} \in \mathrm{Im}(P_j)$ から

$$\mathbb{K}^n = \mathrm{Im}(P_1) + \mathrm{Im}(P_2) + \mathrm{Im}(P_3)$$

となります。右辺の和が直和となることを示します。

$$\vec{w}_j \in \mathrm{Im}(P_j) \quad (j = 1, 2, 3)$$

が

$$\vec{w}_1 + \vec{w}_2 + \vec{w}_3 = \vec{0}$$

を満たすとします。$\exists \vec{v}_j \in \mathbb{K}^n$ に対して $\vec{w}_j = P_j\vec{v}_j$ となりますから

$$P_1\vec{v}_1 + P_2\vec{v}_2 + P_3\vec{v}_3 = \vec{0} \qquad (\#)$$

となります。この両辺に $P_3$ をかけると　$P_3P_1 = P_3P_2 = O_n$,
$P_3^2 = P_3$ から

$$P_3\vec{v}_3 = \vec{0} \quad \text{i.e.} \quad \vec{w}_3 = 0$$

であることが分かります。(#)は

$$P_1\vec{v}_1 + P_2\vec{v}_2 = \vec{0} \qquad (\#2)$$

となりますが　両辺に $P_2$ をかけると $P_1P_2 = O_n$, $P_2^2 = P_2$ から

$$P_2\vec{v}_2 = \vec{0} \quad \text{i.e.} \quad \vec{w}_2 = \vec{0}$$

さらに (#2) から

$$P_1\vec{v}_1 = \vec{0}, \quad \text{i.e.} \quad \vec{w}_3 = \vec{0}$$

となります。よってで

$$V_1 \oplus V_2 \oplus V_3$$

であることが分かります

II　$V_j \subset W_j$ から $\dim V_j \leq \dim W_j$ $(j=1, \cdots, l)$ となります。

$$V_1 \oplus \cdots \oplus V_l \subset W_1 \oplus \cdots \oplus W_l$$

から

$$\dim V_1 + \cdots + \dim V_l \leq \dim W_1 + \cdots + \dim W_l$$

となりますが　この等号成立条件が

$$V_1 \oplus \cdots \oplus V_l = W_1 \oplus \cdots \oplus W_l$$

であり

$$\dim V_1 = \dim W_1, \cdots, \dim V_l = \dim W_l$$

となります。さらに各部分空間は

同様に　$V_1 = W_1, \cdots, V_l = W_l$

となります。よってで

$$V_1 = W_1, \cdots, V_l = W_l$$

が成立します。

III 任意の $\vec{v} \in \mathbb{K}^n$ に対して $I_n = P + Q$ をかけると

$$v = P\vec{v} + Q\vec{v}$$

となるが $P\vec{v} \in \mathrm{Im}(P)$, $Q\vec{v} \in \mathrm{Im}(Q)$ から

$$\mathbb{K}^n = \mathrm{Im}(P) + \mathrm{Im}(Q)$$

であることが分かる.

$$\vec{w}_1 \in \mathrm{Im}(P),\ \vec{w}_2 \in \mathrm{Im}(Q),\ \vec{w}_1 + \vec{w}_2 = \vec{0} \quad \cdots (0)$$

とすると $\exists \vec{v}_1 \in \mathbb{K}^n$, $\exists \vec{v}_2 \in \mathbb{K}^n$ に対して

$$\vec{w}_1 = P\vec{v}_1,\ \vec{w}_2 = Q\vec{v}_2$$

となるから

$$P\vec{v}_1 + Q\vec{v}_2 = \vec{0} \qquad \cdots (1)$$

となる.

$$Q = I_n - P$$

の両辺に $P$ をかけると

$$PQ = P - P^2 = O_n$$

となることに注意すると (1) に $P$ をかけると

$$P^2\vec{v}_1 + PQ\vec{v}_2 = \vec{0}$$ 従って $P\vec{v}_1 = \vec{0}$.

これは $\vec{w}_1 = \vec{0}$ を意味するので, (0) から $\vec{w}_2 = \vec{0}$ も従う.

IV　$|A|=0$ からまず直交座標変換を論ずる.

$$\Phi_A(\lambda)=\begin{vmatrix}\lambda-9 & -6 & -6\\ -6 & \lambda-6 & 0\\ -6 & 0 & \lambda-12\end{vmatrix}=(\lambda-9)(\lambda-6)(\lambda-12)-36(\lambda-12)-36(\lambda-6)$$

$$=(\lambda-9)(\lambda-6)(\lambda-12)-36(2\lambda-18)$$

$$=(\lambda-9)(\lambda-6)(\lambda-12)-72(\lambda-9)$$

$$=(\lambda-9)(\lambda^2-18\lambda)$$

$$=\lambda(\lambda-9)(\lambda-18)$$

から $A$ の固有値は $\lambda=0,9,18$ である. 固有ベクトルを求める

<u>$\lambda=0$ のとき</u>　$A\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\vec{0}\iff\begin{pmatrix}9&6&6\\6&6&0\\6&0&12\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\vec{0}$

$$\iff\begin{pmatrix}1&0&2\\0&1&-2\\0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\vec{0}\iff\begin{array}{l}x+2z=0\\y-2z=0\end{array}$$

から $\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2z\\2z\\z\end{pmatrix}=z\begin{pmatrix}-2\\2\\1\end{pmatrix}$ $(z\neq0)$ が固有ベクトルである.

<u>$\lambda=9$ のとき</u>　$A\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=9\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\iff\begin{pmatrix}0&-6&-6\\-6&3&0\\-6&0&-3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\vec{0}$

$$\iff\begin{pmatrix}1&0&\frac{1}{2}\\0&1&1\\0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\vec{0}\iff x+\tfrac{1}{2}z=0,\ y=-z$$

から $\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}z\\-z\\z\end{pmatrix}=\frac{1}{2}z\begin{pmatrix}-1\\-2\\2\end{pmatrix}$ $(z\neq0)$ が固有ベクトルである

<u>$\lambda=18$ のとき</u>　$A\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=18\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\iff\begin{pmatrix}9&-6&-6\\-6&12&0\\-6&0&6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\vec{0}$

$$\iff\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&1&-\frac{1}{2}\\0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\vec{0}\iff x-z=0,\ y-\tfrac{1}{2}z=0$$

から $\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}z\\\frac{1}{2}z\\z\end{pmatrix}=\frac{1}{2}z\begin{pmatrix}2\\1\\2\end{pmatrix}$ $(z\neq0)$ が固有ベクトルである.

$P = (\vec{P_1}\ \vec{P_2}\ \vec{P_3}) = \frac{1}{3}\begin{pmatrix}-2 & -1 & 2\\ 2 & -2 & 1\\ 1 & 2 & 2\end{pmatrix}$ とするとPは直交行列で

${}^tPAP = \begin{pmatrix}0 & & \\ & 9 & \\ & & 18\end{pmatrix}$ となる。 $\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = P\begin{pmatrix}\xi\\ \eta\\ \zeta\end{pmatrix}$ とすると

$$\left(A\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\right) + 2\left(\vec{e}, \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\right) + c = 0$$

は

$$9\eta^2 + 18\zeta^2 + 2\left({}^tP\vec{e}, \begin{pmatrix}\xi\\ \eta\\ \zeta\end{pmatrix}\right) + c = 0$$

となるが ${}^tP\vec{e} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix}-2 & 2 & 1\\ -1 & -2 & 2\\ 2 & 1 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\4\\-4\end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix}0\\-18\\0\end{pmatrix}$ となるので

$$9\eta^2 + 18\zeta^2 - 12\eta + c = 0$$

これはさらに

$$9\left(\eta - \frac{2}{3}\right)^2 + 18\zeta^2 + c - 4 = 0$$

となるので $X = \xi,\ Y = \eta - \frac{2}{3},\ Z = \zeta$ とすると

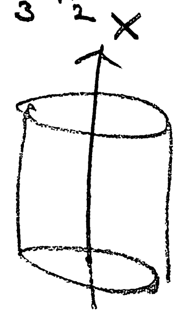
$$9Y^2 + 18Z^2 + c - 4 = 0$$

となる。

補足 (i) $c = 4$ のとき $\{Y = Z = 0\}$ となる。これは直線を表す。$\eta = \frac{2}{3}, \zeta = 0$ から、$\xi = s$ とすると

$$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = P\begin{pmatrix}s\\ \frac{2}{3}\\ 0\end{pmatrix} = s\vec{P_1} + \frac{2}{3}\vec{P_2}$$

と $s$ でパラメータ表示される。




(ii) $4 - c > 0$ のとき 楕円柱となる

(iii) $4 - c < 0$ のとき 空集合となる。

V. Aの固有多項式を簡単にする.

$1r += 2r \times (-1)$

$$\Phi_A(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda-4 & -4 & -2 \\ -4 & \lambda-4 & -2 \\ -2 & -2 & \lambda-1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda & -\lambda & 0 \\ -4 & \lambda-4 & -2 \\ -2 & -2 & \lambda-1 \end{vmatrix} = \lambda \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -4 & \lambda-4 & -2 \\ -2 & -2 & \lambda-1 \end{vmatrix}$$

$$= \lambda \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & \lambda-8 & -2 \\ 0 & -4 & \lambda-1 \end{vmatrix} = \lambda \begin{vmatrix} \lambda-8 & -2 \\ -4 & \lambda-1 \end{vmatrix} = \lambda(\lambda^2 - 9\lambda)$$

$$= \lambda^2(\lambda - 9)$$

からAの固有値は $\lambda = 0$ (重根), 9 である.

固有ベクトルを求める.

<u>$\lambda = 0$のとき</u> $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -4 & -4 & -2 \\ -2 & -2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \vec{0} \iff 2x + 2y + z = 0$

となるので固有ベクトルは

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ -2x-2y \end{pmatrix} = x\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \quad (x \neq 0 \text{ or } y \neq 0)$$

$\vec{q}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$, $\vec{q}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ が $V(0)$ の基底となるが, これを正規直交化する. $\vec{r}_1 = \frac{1}{\|\vec{q}_1\|}\vec{q}_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$, $\vec{q}_2$ の $\vec{q}_1$ 方向への直交射影は

$\vec{w} = \frac{(\vec{q}_1, \vec{q}_2)}{\|\vec{q}_1\|^2}\vec{q}_1 = \frac{4}{5}\vec{q}_1$ となるので $\vec{q}_1$ に垂直な $V(0)$ のベクトルとして

$\vec{q}_2 - \vec{w} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} - \frac{4}{5}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} -4 \\ 5 \\ -2 \end{pmatrix}$ から $\vec{r}_2 = \frac{1}{3\sqrt{5}}\begin{pmatrix} -4 \\ 5 \\ -2 \end{pmatrix}$

とすると $\|\vec{r}_1\| = \|\vec{r}_2\| = 1$, $(\vec{r}_1, \vec{r}_2) = 0$ となる.

<u>$\lambda = 9$のとき</u>

$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in V(9) \iff \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & -4 & 8 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \vec{0} \iff \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \vec{0} \iff x = 2z, y = 2z$

から固有ベクトルは $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2z \\ 2z \\ z \end{pmatrix} = z\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \, (z \neq 0)$

となる $\vec{r}_3 = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ とすると

$V(0) \perp V(9)$ から $(\vec{r}_1, \vec{r}_3) = (\vec{r}_2, \vec{r}_3) = 0$, $\|\vec{r}_3\| = 1$ となるので

$R = (\vec{r}_1\ \vec{r}_2\ \vec{r}_3) \in O(3)$ が分かる.

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = R \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{pmatrix}$$

で変数変換すると

$${}^tRAR = \begin{pmatrix} 0 & & \\ & 0 & \\ & & 9 \end{pmatrix}, \quad {}^tR\vec{b} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}}(1\ 0\ -2)\begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} \\ \frac{1}{3\sqrt{5}}(-4\ 5\ -2)\begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} \\ \frac{1}{3}(2\ 2\ 1)\begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix}$$

となるので与えられた2次曲面は

(#) $\quad 9\zeta^2 + 12\zeta + c = 0$

となる.

注

(##) $\quad 9\left(\zeta + \frac{2}{3}\right)^2 + c - 4 = 0$

とするとどのような図形になるか分かりやすい.

<u>$c > 4$ のとき</u> 空集合

<u>$c = 4$ のとき</u> 一平面 $\zeta = -\frac{2}{3}$

これは $\frac{1}{3}(2x + 2y + z) = -\frac{2}{3}$

すなわち $2x + 2y + z = -2$

<u>$c < 4$ のとき</u> 2平面

$$\zeta = -\frac{2}{3} \pm \frac{\sqrt{4-c}}{3}$$

VI　$AB$がエルミートとすると

$$(AB)^* = AB.$$

この左辺は　$B^*A^*$となるが　さらに　$A=A^*$, $B=B^*$なので

$$AB = (AB)^* = B^*A^* = BA$$

となる. 逆に $AB=BA$ とする.

$$(AB)^* = B^*A^* \underset{\substack{\uparrow \\ A^*=A,\ B^*=B}}{=} BA = AB$$

から $AB$がエルミートとなる.