slin2019
L17, 12/13

I (1)

$$\begin{vmatrix} \lambda & 1 & 0 & \lambda \\ 0 & \lambda & \lambda & 1 \\ 1 & \lambda & \lambda & 0 \\ \lambda & 0 & 1 & \lambda \end{vmatrix} \xrightarrow{1r + = (2r+3r+4r)} = \begin{vmatrix} 2\lambda+1 & 2\lambda+1 & 2\lambda+1 & 2\lambda+1 \\ 0 & \lambda & \lambda & 1 \\ 1 & \lambda & \lambda & 0 \\ \lambda & 0 & 1 & \lambda \end{vmatrix}$$

$$= (2\lambda+1) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & \lambda & \lambda & 1 \\ 1 & \lambda & \lambda & 0 \\ \lambda & 0 & 1 & \lambda \end{vmatrix} = (2\lambda+1) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & \lambda & \lambda & 1 \\ 0 & \lambda-1 & \lambda-1 & -1 \\ 0 & -\lambda & 1-\lambda & 0 \end{vmatrix}$$

$$= (2\lambda+1) \begin{vmatrix} \lambda & \lambda & 1 \\ \lambda-1 & \lambda-1 & -1 \\ -\lambda & 1-\lambda & 0 \end{vmatrix} = (2\lambda+1) \begin{vmatrix} 2\lambda-1 & 2\lambda-1 & 0 \\ \lambda-1 & \lambda-1 & -1 \\ -\lambda & 1-\lambda & 0 \end{vmatrix}$$

$$= (2\lambda+1)(2\lambda-1) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ \lambda-1 & \lambda-1 & -1 \\ -\lambda & 1-\lambda & 0 \end{vmatrix}$$

$$= (2\lambda+1)(2\lambda-1) \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -\lambda & 1-\lambda \end{vmatrix} = (2\lambda+1)(2\lambda-1)$$

から $\lambda = \pm \frac{1}{2}$

(2)

$$\begin{vmatrix} \lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda+1 & \lambda+1 & \lambda+1 & \lambda+1 \\ 0 & \lambda & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \lambda \end{vmatrix}$$

$$= (\lambda+1) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & \lambda & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \lambda \end{vmatrix} = (\lambda+1) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & \lambda & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 1 \\ 0 & -1 & -1 & \lambda-1 \end{vmatrix}$$

$$= (\lambda+1) \begin{vmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ -1 & -1 & \lambda-1 \end{vmatrix} = (\lambda+1) \begin{vmatrix} \lambda-1 & 0 & \lambda-1 \\ 0 & \lambda & 1 \\ -1 & -1 & \lambda-1 \end{vmatrix}$$

$$= (\lambda+1)(\lambda-1) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & \lambda & 1 \\ -1 & -1 & \lambda-1 \end{vmatrix} = (\lambda+1)(\lambda-1) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & -1 & \lambda \end{vmatrix}$$

$$= (\lambda+1)(\lambda-1)(\lambda^2+1)$$ から $\lambda = \pm 1, \pm i$.

Ⅱ $$\Phi_A(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda I_{n_1} - A_1 & * \\ O & \lambda I_{n_2} - A_2 \end{vmatrix}$$

$$= |\lambda I_{n-1} - A_1| \cdot |\lambda I_{n_2} - A_2|$$

$$= \Phi_{A_1}(\lambda)\ \Phi_{A_2}(\lambda)$$

Ⅲは次頁

Ⅳ $\Phi_U(\alpha)=0$ から $\exists \vec{z} \neq \vec{0}$ に対して $U\vec{z} = \alpha \vec{z}$ が成立します。

$$(U\vec{z}, U\vec{z}) = (\vec{z}, \vec{z}) = \|\vec{z}\|^2 > 0$$

よって

$$(U\vec{z}, U\vec{z}) = (\alpha \vec{z}, \alpha \vec{z}) = \alpha \cdot \overline{\alpha} (\vec{z}, \vec{z})$$
$$= |\alpha|^2 \|\vec{z}\|^2$$

から

$$|\alpha|^2 = 1 \quad \text{従って} \quad |\alpha| = 1$$

となります。

slin2019
L17 12/13.

①

III $\vec{z} \in \mathbb{C}^n$, $\vec{w} \in \mathbb{C}^m$ に対して

$$((U_1+U_2)\vec{z}, \vec{w}) = (\vec{z}, (U_1+U_2)^*\vec{w}) \quad \text{(i)}$$

が成立します。他方

$$((U_1+U_2)\vec{z}, \vec{w}) = (U_1\vec{z}, \vec{w}) + (U_2\vec{z}, \vec{w})$$
$$= (\vec{z}, U_1^*\vec{w}) + (\vec{z}, U_2^*\vec{w})$$
$$= (\vec{z}, U_1^*\vec{w} + U_2^*\vec{w})$$
$$= (\vec{z}, (U_1^*+U_2^*)\vec{w}) \quad \text{(ii)}$$

となります。(i) (ii) から 任意の $\vec{z} \in \mathbb{C}^n$ に対して

$$(\vec{z}, (U_1+U_2)^*\vec{w}) = (\vec{z}, (U_1^*+U_2^*)\vec{w})$$

が成立しますから

$$(U_1+U_2)^*\vec{w} = (U_1^*+U_2^*)\vec{w}$$

が 任意の $\vec{w} \in \mathbb{C}^m$ に対して成立します。従って

$$(U_1+U_2)^* = U_1^* + U_2^*$$

であることが分かります。

注

$$
\begin{aligned}
(U_1+U_2)^* &= {}^t\left(\overline{U_1+U_2}\right) \\
&= {}^t\left(\overline{U_1}+\overline{U_2}\right) \\
&= {}^t(\overline{U_1}) + {}^t(\overline{U_2}) \\
&= U_1^* + U_2^*
\end{aligned}
$$

と示せます.

$\vec{u}\in\mathbb{C}^l$, $\vec{w}\in\mathbb{C}^m$ に対して

$$(U_1T\vec{u},\ \vec{w}) = (\vec{u},\ (U_1T)^*\vec{w}) \quad \text{(iii)}$$

となります. さらに

$$(U_1T\vec{u},\ \vec{w}) = (T\vec{u},\ U_1^*\vec{w}) = (\vec{u},\ T^*U_1^*\vec{w}) \quad \text{(iv)}$$

となります. (iii), (iv) から

$$(\vec{u},\ (U_1T)^*\vec{w}) = (\vec{u},\ T^*U_1^*\vec{w})$$

が任意の $\vec{u}$ について成立することが従いますから

$$(U_1T)^*\vec{w} = T^*U_1^*\vec{w}$$

となります. これが任意の $\vec{w}\in\mathbb{C}^m$ で成立することから

$$(U_1T)^* = T^*U_1^*$$

であることが分かります.

注

$$
\begin{aligned}
(U_1T)^* &= {}^t\left(\overline{U_1T}\right) = {}^t\left(\overline{U_1}\,\overline{T}\right) \\
&= {}^t(\overline{T})\cdot{}^t(\overline{U_1}) = T^*U_1^*
\end{aligned}
$$

$$T(z_1\vec{e_1}+\cdots+z_n\vec{e_n}) = z_1 T(\vec{e_1})+\cdots+z_n T(\vec{e_n})$$

$$= \left(\vec{z},\ \begin{pmatrix} \overline{T(\vec{e_1})} \\ \vdots \\ \overline{T(\vec{e_n})} \end{pmatrix}\right)$$

から $\vec{u} = \begin{pmatrix} \overline{T(\vec{e_1})} \\ \vdots \\ \overline{T(\vec{e_n})} \end{pmatrix}$ として成立します.

$$T(\vec{z}) = (\vec{z}, \vec{u})$$

となります.

$$(\vec{z}, \vec{u_1}) = (\vec{z}, \vec{u_2}) \qquad (\forall \vec{z} \in \mathbb{C}^n)$$

とすると

$$(\vec{z}, \vec{u_1}-\vec{u_2}) = 0 \qquad (\forall \vec{z} \in \mathbb{C}^n)$$

となりますが $\vec{z} = \vec{u_1}-\vec{u_2}$ とすると

$$\|\vec{u_1}-\vec{u_2}\|^2 = 0$$

から $\vec{u_1} = \vec{u_2}$ となります.

6 (1)

i) $(U_1^* \vec{z}, U_1^* \vec{w}) = (\vec{z}, U_1 U_1^* \vec{w})$

$= (\vec{z}, \vec{w})$

が任意の $\vec{z}, \vec{w} \in \mathbb{C}^n$ に対して成立するから

$U_1^* \in U(n)$

ii) $(U_1 U_2 \vec{z}, U_1 U_2 \vec{w}) = (U_2 \vec{z}, U_2 \vec{w}) = (\vec{z}, \vec{w})$

が任意の $\vec{z}, \vec{w} \in \mathbb{C}^n$ に対して成立するから

$U_1 U_2 \in U(n)$

(2) $Q = (\vec{q}_1 \cdots \vec{q}_n)$, $P = (\vec{p}_1 \cdots \vec{p}_n)$ とすると $P, Q \in U(n)$

で

$U = P^{-1} Q = P^* Q \in U(n)$

が分かります.

V 11

(1) $\vec{u} = c_1 \vec{p_1} + \cdots + c_n \vec{p_n}$

とすると

$$(\vec{u}, \vec{p_j}) = c_j \quad (j = 1, \cdots, n)$$

となりますから

$$\vec{u} = (\vec{u}, \vec{p_1})\vec{p_1} + \cdots + (\vec{u}, \vec{p_n})\vec{p_n}$$

となります。

(2) $(\text{左辺}) = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \overline{\beta_j} (\vec{p_j}, \vec{p_j}) = \alpha_1 \overline{\beta_1} + \cdots + \alpha_n \overline{\beta_n}$

となります。

(3)
$$\vec{u} = (\vec{u}, \vec{p_1}) \cdot \vec{p_1} + \cdots + (\vec{u}, \vec{p_n})\vec{p_n}$$
$$\vec{v} = (\vec{v}, \vec{p_1})\vec{p_1} + \cdots + (\vec{v}, \vec{p_n})\vec{p_n}$$

に対して (2)を用いると

$$(\vec{u}, \vec{v}) = (u, \vec{p_1})\overline{(\vec{v}, \vec{p_1})} + \cdots + (\vec{u}, \vec{p_n})\overline{(\vec{v}, \vec{p_n})}$$

viii

$$Q^*Q = \begin{pmatrix} (\vec{q}_1)^* \\ \vdots \\ (\vec{q}_\ell)^* \end{pmatrix} (\vec{q}_1 \cdots \vec{q}_\ell)$$

$$= ((\vec{q}_i)^* \vec{q}_j) = ((\vec{q}_j, \vec{q}_i))$$

から

$\vec{q}_1, \cdots, \vec{q}_\ell$ が正規直交系 $\Leftrightarrow$ $Q^*Q = I_n$

と同値。

$\Leftarrow$ $(PU)^* PU = U^* P^* P U = U^* I_\ell U$

$= U^* U = I_n$

から分かります。

$\Rightarrow$ $Q^*Q = I_n$ から

$$I_n = Q^*Q = U^* P^* P U = U^* U$$

となるので

U は unitary

である事が分かります。