2019 年 6 月 21 日演習問題

I $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}$ とします.

(1) A を対角化しましょう.

(2) 微分方程式

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$$

の解を初期値 $\begin{pmatrix} x(0) \\ y(0) \end{pmatrix}$ で表しましょう.

解答

(1) A の固有多項式は

$$\Phi_A(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & -2 \\ -3 & \lambda + 4 \end{vmatrix} = (\lambda - 1)(\lambda + 4) - 6 = \lambda^2 + 3\lambda - 10 = (\lambda + 5)(\lambda - 2)$$

となるので A の固有値は $\lambda = -5, 2$ であることが分かる．次に固有ベクトルを求めよう.

(a) $\lambda = -5$ のとき

$$A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = -5 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -6 & -2 \\ -3 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \vec{0} \Leftrightarrow 3x + y = 0$$

となるので，固有ベクトルは

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ -3x \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix} \quad (x \neq 0)$$

となる.

(b) $\lambda = 2$ のとき

$$A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \vec{0} \Leftrightarrow x - 2y = 0$$

となるので，固有ベクトルは

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2y \\ y \end{pmatrix} = y \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (y \neq 0)$$

となる.

ここで

$$\vec{p}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}, \quad \vec{p}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad P = (\vec{p}_1 \ \vec{p}_2) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$$

と具体的に固有ベクトルを選ぶと

$$AP = (A\vec{p}_1 \ A\vec{p}_2) = (-5\vec{p}_1 \ 2\vec{p}_2) = (\vec{p}_1 \ \vec{p}_2) \begin{pmatrix} -5 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} -5 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

が成立する．一般論（定理∗∗）から P が正則であることが分かっているので，この式の両辺に右から P^{-1} を掛けると

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} -5 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

と対角化できる．

(2)

$$\begin{pmatrix}\xi(t)\\ \eta(t)\end{pmatrix}=P^{-1}\begin{pmatrix}x(t)\\ y(t)\end{pmatrix}$$

と定義すると

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\begin{pmatrix}\xi(t)\\ \eta(t)\end{pmatrix}&=P^{-1}\frac{d}{dt}\begin{pmatrix}x(t)\\ y(t)\end{pmatrix}=P^{-1}A\begin{pmatrix}x(t)\\ y(t)\end{pmatrix}\\ &=P^{-1}AP\begin{pmatrix}\xi(t)\\ \eta(t)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-5&0\\ 0&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\xi(t)\\ \eta(t)\end{pmatrix}\end{aligned}$$

から

$$\xi'(t)=-5\xi(t),\quad \eta'(t)=2\eta(t)$$

が成立することが分かります．これから

$$\xi(t)=\xi(0)e^{-5t},\quad \eta(t)=\eta(0)e^{2t}$$

であることが従います．これから

$$\begin{pmatrix}x(t)\\ y(t)\end{pmatrix}=P\begin{pmatrix}\xi(t)\\ \eta(t)\end{pmatrix}=P\begin{pmatrix}e^{-5t}&0\\ 0&e^{2t}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\xi(0)\\ \eta(0)\end{pmatrix}=P\begin{pmatrix}e^{-5t}&0\\ 0&e^{2t}\end{pmatrix}P^{-1}\begin{pmatrix}x(0)\\ y(0)\end{pmatrix}$$

であることが分かります．

II $A=\begin{pmatrix}-4&-2\\ 3&1\end{pmatrix}$ とします。

(1) A を対角化しましょう。

(2) 微分方程式

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix}x(t)\\ y(t)\end{pmatrix}=A\begin{pmatrix}x(t)\\ y(t)\end{pmatrix}$$

の解を初期値 $\begin{pmatrix}x(0)\\ y(0)\end{pmatrix}$ で表しましょう。

解答

(1)A の固有多項式は

$$\Phi_A(\lambda)=\begin{vmatrix}\lambda+4&2\\ -3&\lambda-1\end{vmatrix}=(\lambda+4)(\lambda-1)+6=\lambda^2+3\lambda+2=(\lambda+1)(\lambda+2)$$

となるので A の固有値は $\lambda=-2,-1$ であることが分かる．次に固有ベクトルを求めよう．

(i) $\lambda=-2$ のとき

$$A\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=-2\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}\Leftrightarrow\begin{pmatrix}2&2\\ -3&-3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\vec{0}\Leftrightarrow x+y=0$$

となるので，固有ベクトルは

$$\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-y\\ y\end{pmatrix}=y\begin{pmatrix}-1\\ 1\end{pmatrix}\quad(y\neq 0)$$

となる．

(ii) $\lambda = -1$ のとき

$$A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = -1\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -3 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \vec{0} \Leftrightarrow 3x + 2y = 0$$

となるので，固有ベクトルは

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{2}{3}y \\ y \end{pmatrix} = \frac{y}{3}\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix} \quad (y \neq 0)$$

となる．

ここで

$$\vec{p}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{p}_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad P = (\vec{p}_1\ \vec{p}_2) = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

と具体的に固有ベクトルを選ぶと

$$AP = (A\vec{p}_1\ A\vec{p}_2) = (-2\vec{p}_1\ \ -\vec{p}_2) = (\vec{p}_1\ \vec{p}_2)\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = P\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

が成立する．一般論（定理＊＊）から P が正則であることが分かっているので，この式の両辺に右から P^{-1} を掛けると

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

と対角化できる．

(2)

$$\begin{pmatrix} \xi(t) \\ \eta(t) \end{pmatrix} = P^{-1}\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$$

と定義すると

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\begin{pmatrix} \xi(t) \\ \eta(t) \end{pmatrix} &= P^{-1}\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = P^{-1}A\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} \\ &= P^{-1}AP\begin{pmatrix} \xi(t) \\ \eta(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \xi(t) \\ \eta(t) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

から

$$\xi'(t) = -2\xi(t), \quad \eta'(t) = -\eta(t)$$

が成立することが分かります．これから

$$\xi(t) = \xi(0)e^{-2t}, \quad \eta(t) = \eta(0)e^{-t}$$

であることが従います．これから

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = P\begin{pmatrix} \xi(t) \\ \eta(t) \end{pmatrix} = P\begin{pmatrix} e^{-2t} & 0 \\ 0 & e^{-t} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \xi(0) \\ \eta(0) \end{pmatrix} = P\begin{pmatrix} e^{-2t} & 0 \\ 0 & e^{-t} \end{pmatrix}P^{-1}\begin{pmatrix} x(0) \\ y(0) \end{pmatrix}$$

であることが分かります．

III(IV の準備) $A \in M_3(\mathbf{K})$ とします．$\alpha, \beta \in \mathbf{K}$ が条件

$$\alpha \neq \beta$$

を満たすとします．さらに $\vec{p}, \vec{q} \in \mathbf{K}^3$ が条件

$$A\vec{p} = \alpha\vec{p}, A\vec{q} = \beta\vec{q}$$
$$\vec{p} + \vec{q} = \vec{0}$$

を満たすならば、

$$\vec{p} = \vec{q} = \vec{0}$$

が成立することを証明しましょう．

解答

$$\vec{p} + \vec{q} = \vec{0} \tag{3}$$

の両辺に A を掛けると

$$\alpha\vec{p} + \beta\vec{q} = \vec{0} \tag{4}$$

が，β を掛けると

$$\beta\vec{p} + \beta\vec{q} = \vec{0} \tag{5}$$

が従います．(4)−(5) から

$$(\alpha - \beta)\vec{p} = \vec{0}$$

が成立することが分かりますが，$\alpha \neq \beta$ から $\vec{p} = \vec{0}$ が従います．さらにこれを (3) に代入すると $\vec{q} = \vec{0}$ も分かります．

注意　ここでは $A \in M_3(\mathbf{K})$, $\vec{p}, \vec{q} \in \mathbf{K}^3$ としていますが

$$A \in M_n(\mathbf{K}), \quad \vec{p}, \vec{q} \in \mathbf{K}^n$$

でも解答はそのままです．

IV $A \in M_3(\mathbf{K})$ とします．$\alpha, \beta, \gamma \in \mathbf{K}$ が条件

$$\alpha \neq \beta,\ \beta \neq \gamma,\ \gamma \neq \alpha$$

を満たすとします．さらに $\vec{p}, \vec{q}, \vec{r} \in \mathbf{K}^3$ が条件

$$A\vec{p} = \alpha\vec{p}, A\vec{q} = \beta\vec{q}, A\vec{r} = \gamma\vec{r}$$
$$\vec{p} + \vec{q} + \vec{r} = \vec{0}$$

を満たすならば、

$$\vec{p} = \vec{q} = \vec{r} = \vec{0}$$

が成立することを証明しましょう．

解答 III に帰着する形で証明します.

$$\vec{p}+\vec{q}+\vec{r}=\vec{0} \tag{6}$$

の両辺に A を掛けると

$$\alpha\vec{p}+\beta\vec{q}+\gamma\vec{r}=\vec{0} \tag{7}$$

が，γ を掛けると

$$\gamma\vec{p}+\gamma\vec{q}+\gamma\vec{r}=\vec{0} \tag{8}$$

が従います．(7)−(8) から

$$(\alpha-\gamma)\vec{p}+(\beta-\gamma)\vec{q}=\vec{0}$$

が成立することが分かります．ここで

$$\begin{aligned}A\cdot(\alpha-\gamma)\vec{p}&=(\alpha-\gamma)A\vec{p}=(\alpha-\gamma)\alpha\vec{p}=\alpha\cdot(\alpha-\gamma)\vec{p}\\A\cdot(\beta-\gamma)\vec{q}&=(\beta-\gamma)A\vec{q}=(\beta-\gamma)\beta\vec{q}=\beta\cdot(\beta-\gamma)\vec{q}\end{aligned}$$

がら III が適用できて

$$(\alpha-\gamma)\vec{p}=(\beta-\gamma)\vec{q}=\vec{0}$$

となりますが，$\alpha\neq\gamma$, $\beta\neq\gamma$ から

$$\vec{p}=\vec{q}=\vec{0}$$

が従います．これを (6) に代入すると $\vec{r}=\vec{0}$ であることも分かります.

注意　ここでは $A\in M_3(\mathbf{K})$, $\vec{p},\vec{q},\vec{r}\in\mathbf{K}^3$ としていますが

$$A\in M_n(\mathbf{K}),\quad \vec{p},\vec{q},\vec{r}\in\mathbf{K}^n$$

でも解答はそのままです.

発展問題　$A\in M_n(\mathbf{K})$, $\vec{p}_j\in\mathbf{K}^n$ $(j=1,\ldots,\ell)$ が

$$\vec{p}_1+\cdots+\vec{p}_\ell=\vec{0}$$

$$A\vec{p}_j=\alpha_j\vec{p}_j\quad(j=1,\ldots,\ell)$$

$$\alpha_i\neq\alpha_j\quad(i\neq j)$$

を満たすとします．このとき

$$\vec{p}_1=\cdots=\vec{p}_\ell=\vec{0}$$

が成立することを ℓ に関する帰納法で証明しましょう.

V $P\in M_2(\mathbf{R})$ に対して，以下の条件 (i), (ii), (iii) が互いに必要十分であることを示しましょう.

(i) ${}^tPP=I_2$,

(ii) $(P\vec{v},P\vec{w})=(\vec{v},\vec{w})\quad(\vec{v},\vec{w}\in\mathbf{R}^2)$,

(iii) $P=(\vec{p}_1\ \vec{p}_2)$ とすると $||\vec{p}_1||=||\vec{p}_2||=1$, $(\vec{p}_1,\vec{p}_2)=0$ が成立する.

解答

((i)⇒(ii))

$$(P\vec{v}, P\vec{w}) = ({}^tPP\vec{v}, \vec{w}) = (I_2\vec{v}, \vec{w}) = (\vec{v}, \vec{w})$$

((ii)⇒(i)) $(P\vec{v}, P\vec{w}) = ({}^tPP\vec{v}, \vec{w})$ が一般的に成立しますから，条件 (ii) は

$$({}^tPP\vec{v}, \vec{w}) = (\vec{v}, \vec{w}) \quad (\vec{v}, \vec{w} \in \mathbf{R}^2)$$

と必要十分です．これは

$$(({}^tPP - I_2)\vec{v}, \vec{w}) = 0 \quad (\vec{v}, \vec{w} \in \mathbf{R}^2)$$

と必要十分です．さらに任意のベクトルに垂直なベクトルは $\vec{0}$ ですから,

$$({}^tPP - I_2)\vec{v} = \vec{0} \quad (\vec{v} \in \mathbf{R}^2)$$

任意のベクトルに対して像が $\vec{0}$ である行列はゼロ行列ですから

$${}^tPP = I_2$$

が従います.

((i)⇔(iii)) 一般的に

$${}^tPP = \begin{pmatrix} ||\vec{p}_1||^2 & (\vec{p}_1, \vec{p}_2) \\ (\vec{p}_2, \vec{p}_1) & ||\vec{p}_2||^2 \end{pmatrix}$$

が成立しますから

$$\begin{aligned} \text{(i)} &\Leftrightarrow \begin{pmatrix} ||\vec{p}_1||^2 & (\vec{p}_1, \vec{p}_2) \\ (\vec{p}_2, \vec{p}_1) & ||\vec{p}_2||^2 \end{pmatrix} = I_2 \\ &\Leftrightarrow ||\vec{p}_1||^2 = ||\vec{p}_2||^2 = 1,\ (\vec{p}_1, \vec{p}_2) = 0 \Leftrightarrow \text{(iii)} \end{aligned}$$

VI $P \in M_2(\mathbf{R})$ が直交行列とします．すなわち以下の同値な条件 (i), (ii), (iii) のいずれかが成立するとします.

(i) ${}^tPP = I_2$,

(ii) $(P\vec{v}, P\vec{w}) = (\vec{v}, \vec{w}) \quad (\vec{v}, \vec{w} \in \mathbf{R}^2)$,

(iii) $P = (\vec{p}_1\ \vec{p}_2)$ とすると $||\vec{p}_1|| = ||\vec{p}_2|| = 1,\ (\vec{p}_1, \vec{p}_2) = 0$ が成立する．

(1) $P_1, P_2 \in M_2(\mathbf{R})$ が直交ならば P_1P_2 も直交であることを示しましょう．

(2) $P \in M_2(\mathbf{R})$ であるとき ${}^tP$ も直交となることを示しましょう．

解答 (1)

$${}^t(P_1P_2)P_1P_2 = {}^tP_2{}^tP_1P_1P_2 = {}^tP_2I_2P_2 = {}^tP_2P_2 = I_2$$

から P_1P_2 が直交行列であることが分かります.

(2) 一般に $B \in M_2(\mathbf{K})$ に対して $|{}^tB| = |B|$ が成立しますから

$$|{}^tPP| = |{}^tP| \cdot |P| = |P|^2$$

となりますから $|P|^2=|I_2|=1$ が分かります．従って $|P|=\pm 1$ から P が正則であることが従います．よって ${}^tPP=I_2$ から

$${}^tP=P^{-1}$$

が分かります．以上の準備のもとで

$${}^t\left({}^tP\right){}^tP=P{}^tP=PP^{-1}=I_2$$

から ${}^tP$ が直交行列であることが分かります.

VII $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}\in M_2(\mathbf{R})$ に対して

$$||A||^2=a_{11}^2+a_{12}^2+a_{21}^2+a_{22}^2$$

と定めます。

(1) $\vec{x}\in\mathbf{R}^2$ に対して

$$||A\vec{x}||\leq ||A||\cdot||\vec{x}||$$

を示しましょう。

(2) $A,B\in M_2(\mathbf{R})$ に対して

$$||AB||\leq ||A||\cdot||B||$$

を示しましょう。

解答

(1) $A=(\vec{a}_1\ \vec{a}_2)=\begin{pmatrix} \mathbf{a}_1 \\ \mathbf{a}_2 \end{pmatrix}$ と列ベクトル表示，行ベクトル表示を考えると

$$||A||^2=||\vec{a}_1||^2+||\vec{a}_2||^2=||\mathbf{a}_1||^2+||\mathbf{a}_2||^2$$

が成立することに注意しましょう．他方

$$A\vec{x}=\begin{pmatrix} \mathbf{a}_1\vec{x} \\ \mathbf{a}_2\vec{x} \end{pmatrix}$$

が成立します．ここでコーシー・シュヴァルツの不等式を用いると

$$|\mathbf{a}_j\vec{x}|^2\leq ||\mathbf{a}_j||^2\cdot||\vec{x}||^2$$

が成立します．これを用いると

$$\begin{aligned}||A\vec{x}||^2&=|\mathbf{a}_1\vec{x}|^2+|\mathbf{a}_2\vec{x}|^2\\&\leq ||\mathbf{a}_1||^2||\vec{x}||^2+||\mathbf{a}_2||^2||\vec{x}||^2\\&=(||\mathbf{a}_1||^2+||\mathbf{a}_2||^2)||\vec{x}||^2\\&=||A||^2\cdot||\vec{x}||^2\end{aligned}$$

から

$$||A\vec{x}||^2\leq ||A||\cdot||\vec{x}||$$

が従います.

(2) $B=(\vec{b}_1\ \vec{b}_2)$ と列ベクトル表示をすると

$$\begin{aligned}||AB||^2 &= ||A\vec{b}_1||^2+||A\vec{b}_2||^2\\ &\leq ||A||^2\cdot||\vec{b}_1||^2+||A||^2\cdot||\vec{b}_2||^2\\ &= ||A||^2\cdot(||\vec{b}_1||^2+||\vec{b}_2||^2)=||A||^2\cdot||B||^2\end{aligned}$$

から

$$||AB||\leq ||A||\cdot||B||$$

が従います.

VIII $\vec{a}_1,\vec{a}_2,\vec{c}\in\mathbf{R}^n$, $A=(\vec{a}_1\ \vec{a}_2)$ とします. $\vec{v}_0\in\mathbf{R}^2$ が

$$||\vec{c}-A\vec{v}_0||^2\leq||\vec{c}-A\vec{v}||^2\quad(\vec{v}\in\mathbf{R}^2)$$

を満たすとします. このとき

$$(\vec{c}-A\vec{v}_0,A\vec{v})=0\qquad(\vec{v}\in\mathbf{R}^2)$$

が成立することを示しましょう.

解答　この問題は以下を示せば十分です.

$V(\neq\emptyset)\subset\mathbf{R}^n$ が $\mathbf{R}^n$ の部分空間とします. すなわち

$$\vec{v}_1,\vec{v}_2\in V\quad\Rightarrow\quad\lambda\vec{v}_1+\mu\vec{v}_2\in V$$

が成立するとします. このとき $\vec{v}_0\in V$ と $\vec{e}\in\mathbf{R}^n$ が

$$||\vec{e}-\vec{v}_0||\leq||\vec{e}-\vec{v}||\quad(\vec{v}\in V)\tag{9}$$

を満たせば

$$(\vec{e}-\vec{v}_0)\perp V$$

が成立します.

証明

$$\begin{aligned}||\vec{e}-\vec{v}||^2 &= ||\vec{e}-\vec{v}_0+\vec{v}_0-\vec{v}||^2\\ &= ||\vec{e}-\vec{v}_0||^2+2(\vec{e}-\vec{v}_0,\vec{v}_0-\vec{v})+||\vec{v}_0-\vec{v}||^2\end{aligned}$$

が成立しますから (9) は

$$2(\vec{e}-\vec{v}_0,\vec{v}_0-\vec{v})+||\vec{v}_0-\vec{v}||^2\geq0\quad(\vec{v}\in V)$$

と必要十分であることが分かります. まずこの条件を任意の $\vec{w}\in V$ に対する条件と考えて

$$2(\vec{e}-\vec{v}_0,\vec{v}_0-\vec{w})+||\vec{v}_0-\vec{w}||^2\geq0\quad(\vec{w}\in V)\tag{10}$$

が成立するとします．ここで任意の $\vec{v} \in V$ に対して

$$\vec{w} = \vec{v}_0 - \vec{v} \in V$$

と定めると (10) から

$$2(\vec{e} - \vec{v}_0, \vec{v}) + ||\vec{v}||^2 \geq 0$$

が任意の $\vec{v} \in V$ に対して成立することが分かります．ここで

$$t\vec{v} \in V$$

が任意の $t \in \mathbf{R}$ に対して成立することを用いると

$$2(\vec{e} - \vec{v}_0, t\vec{v}) + ||t\vec{v}||^2 \geq 0 \quad \text{すなわち} \quad t^2||\vec{v}||^2 + 2t(\vec{e} - \vec{v}_0, \vec{v}) \geq 0$$

が任意の $t \in \mathbf{R}$ に対して成立することが従います．$\vec{v} \neq 0$ ならば $||\vec{v}||^2 > 0$ となることに注意すると，

$$t^2||\vec{v}||^2 + 2t(\vec{e} - \vec{v}_0, \vec{v}) = ||\vec{v}||^2 \left(t + \frac{(\vec{e} - \vec{v}_0, \vec{v})}{||\vec{v}||^2} \right)^2 - \frac{(\vec{e} - \vec{v}_0, \vec{v})^2}{||\vec{v}||^4}$$

が成立しますから，もし $(\vec{e} - \vec{v}_0, \vec{v}) \neq 0$ ならば $t = t_0 := -\frac{(\vec{e} - \vec{v}_0, \vec{v})}{||\vec{v}||^2}$ のとき

$$t_0^2||\vec{v}||^2 + 2t_0(\vec{e} - \vec{v}_0, \vec{v}) = -\frac{(\vec{e} - \vec{v}_0, \vec{v})^2}{||\vec{v}||^4} < 0$$

となり矛盾が生じます．従って

$$(\vec{e} - \vec{v}_0, \vec{v}) = 0$$

でなければいけないことが分かります．これは

$$(\vec{e} - \vec{v}_0) \perp V$$

と必要十分です．

IX $\vec{a}_1, \vec{a}_2 \in \mathbf{R}^n$, $A = (\vec{a}_1 \ \vec{a}_2)$ とします．このとき

$$ {}^tAA\text{が正則} \Leftrightarrow \vec{a}_1 \nparallel \vec{a}_2$$

であることを示しましょう．

解答 $(\Rightarrow)$

$$ {}^tAA\text{が正則} \quad \Leftrightarrow \quad \left({}^tAA\vec{v} = \vec{0} \Rightarrow \vec{v} = \vec{0} \right)$$

$$\vec{a}_1 \nparallel \vec{a}_2 \quad \Leftrightarrow \quad \left(A\vec{v} = \vec{0} \Rightarrow \vec{v} = \vec{0} \right)$$

が成立することに注意しましょう．ここで $A\vec{v} = \vec{0}$ とすると ${}^tAA\vec{v} = \vec{0}$ となりますが、${}^tAA$ が正則という前提の下では $\vec{v} = \vec{0}$ が従います．よって $\vec{a}_1 \nparallel \vec{a}_2$ が成立します．
$(\Leftarrow)$ ${}^tAA\vec{v} = \vec{0}$ が成立するとします．このとき

$$||A\vec{v}||^2 = (A\vec{v}, A\vec{v}) = ({}^tAA\vec{v}, \vec{v}) = (\vec{0}, \vec{v}) = 0$$

から $A\vec{v}=\vec{0}$ が従います．いま $\vec{a}_1 \nparallel \vec{a}_2$ を仮定していますから $\vec{v}=\vec{0}$ が従います．

X A は $m\times n$ 行列とします．$A\neq O_{m,n}$ ならば，ある $\vec{x}\in\mathbf{K}^n$ に対して

$$A\vec{x}\neq\vec{0}$$

が成立することを示しましょう．

解答 $A=(\vec{a}_1\ldots\vec{a}_n)$ と列ベクトル表示をすると

$$A=O_{m,n}\Leftrightarrow\vec{a}_1=\cdots=\vec{a}_n=\vec{0}$$

であることが分かります．従って $A\neq O_{m,n}$ ならば，ある j に対して $\vec{a}_j\neq\vec{0}$ であることが分かります．このとき

$$\vec{0}\neq\vec{a}_j=A\vec{e}_j$$

から，ある $\vec{x}\neq\vec{0}$ に対して $A\vec{x}\neq\vec{0}$ が成立することが分かります．

XI(1) $ax+by=0$ を満たす $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\neq\vec{0}$ が存在することを示しましょう．

(2) 連立 1 次方程式

$$\begin{cases}a_1x+a_2y+a_3z&=&0\\b_1x+b_2y+b_3z&=&0\end{cases}$$

を満たす $\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\neq\vec{0}$ が存在することを (1) を用いて示しましょう．

解答 (1)

(i) $\underline{a=0\text{ ならば}}$

$$a\cdot 1+b\cdot 0=0$$

から $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\neq\vec{0}$ が解となります．

(ii) $\underline{a\neq 0\text{ ならば}}$

$$y=-\frac{b}{a}x$$

から $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\-\frac{b}{a}\end{pmatrix}\neq\vec{0}$ が解となります．

(2)

(i) $\underline{a_1=b_1=0\text{ ならば}}$ $\quad\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\neq\vec{0}$ が解となります．

(ii) $\underline{a_1 \neq 0}$ ならば方程式は

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} a_1x & + & a_2y & + & a_3z & = & 0 \\ & & \left(b_2 - \frac{b_1}{a_1}a_2\right)y & + & \left(b_3 - \frac{b_1}{a_1}a_3\right)z & = & 0 \end{array}\right.$$

と必要十分です．このとき $\begin{pmatrix} y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} \neq \vec{0}$ が存在して

$$\left(b_2 - \frac{b_1}{a_1}a_2\right)y_0 + \left(b_3 - \frac{b_1}{a_1}a_3\right)z_0 = 0$$

が成立します．このとき

$$x_0 = -\frac{1}{a_1}\left(a_2y_0 + a_3z_0\right)$$

と定めると $\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} \neq \vec{0}$ が解となります．

(iii) $\underline{b_1 \neq 0}$ ならば(ii) と同様に示すことができます．あるいは方程式が

$$\left\{\begin{array}{ccc} b_1x + b_2y + b_3z & = & 0 \\ a_1x + a_2y + a_3z & = & 0 \end{array}\right.$$

と必要十分であることに注意すれば，(ii) に帰着できます．

XII $A = (\vec{a}_1 \ \cdots \ \vec{a}_n)$, $B = (\vec{b}_1 \ \cdots \ \vec{b}_n)$ を $m \times n$ 行列とします．このとき

$$A\vec{v} = B\vec{v} \quad (\vec{v} \in \mathbf{K}^n)$$

ならば $A = B$ となることを示しましょう．

解答　標準単位ベクトル $\vec{e}_j$ に対して

$$A\vec{e}_j = B\vec{e}_j \quad \text{から} \quad \vec{a}_j = \vec{b}_j$$

が従います．すべての列が等しいことを意味しますから $A = B$ であることが分かります．

XIII 演習 1.19（教科書 13 ページ） $\vec{a} \in \mathbf{R}^n$ がすべての $\vec{x} \in \mathbf{R}^n$ に対して垂直，すなわち

$$(\vec{a}, \vec{x}) = 0 \quad (\vec{x} \in \mathbf{R}^n)$$

が成立するとします．このとき $\vec{a} = \vec{0}$ となることを示しましょう．

解答　$\vec{x} = \vec{a}$ とすると

$$||\vec{a}||^2 = (\vec{a}, \vec{a}) = 0$$

から $\vec{a} = \vec{0}$ が従います．

XIV $A \in M_{m,n}(\mathbf{R})$, $\vec{x} \in \mathbf{R}^n$, $\vec{y} \in \mathbf{R}^m$ に対して

$$(A\vec{x}, \vec{y}) = (\vec{x}, {}^tA\vec{y})$$

が成立することを用いて

$${}^t(AB) = {}^tB \cdot {}^tA \quad (A \in M_{m,n}(\mathbf{R}), B \in M_{n,\ell}(\mathbf{R}))$$

が成立することを証明しましょう.

解答　任意の $\vec{z} \in \mathbf{R}^\ell$ と任意の $\vec{y} \in \mathbf{R}^m$ に対して

$$(AB\vec{z}, \vec{y}) = (B\vec{z}, {}^tA\vec{y}) = (\vec{z}, {}^tB^tA\vec{y})$$

が成立します. 他方

$$(AB\vec{z}, \vec{y}) = (\vec{z}, {}^t(AB)\vec{y})$$

が成立します. 従って

$$\big(\vec{z}, ({}^tB^tA)\vec{y} - {}^t(AB)\vec{y}\big) = 0$$

が任意の $\vec{z} \in \mathbf{R}^\ell$ に対して成立します. よって

$$({}^tB^tA)\vec{y} = {}^t(AB)\vec{y}$$

が任意の $\vec{y} \in \mathbf{R}^n$ に対して成立します. これから

$${}^tB^tA = {}^t(AB)$$

が導けます.

XV $\vec{p}, \vec{q} \in \mathbf{R}^n$ が

$$\vec{p} \perp \vec{q}, \quad \vec{p} \neq \vec{0}, \quad \vec{q} \neq \vec{0}$$

が成立するとき

$$\vec{p} \nparallel \vec{q}$$

が成立することを示しましょう.

解答

$$c_1\vec{p} + c_2\vec{q} = \vec{0} \tag{11}$$

が成立するとします. この両辺と $\vec{q}$ との内積をとると

$$0 = c_1(\vec{p}, \vec{q}) + c_2||\vec{q}||^2 = c_2||\vec{q}||^2$$

となります. このとき $\vec{q} \neq \vec{0}$ から $||\vec{q}||^2 > 0$ が成立します. 従って $c_2 = 0$ を導くことができます. これを (11) に代入すると

$$c_1\vec{p} = \vec{0}$$

となりますが，$\vec{p} \neq \vec{0}$ から $c_1 = 0$ となります．

XVI（直交射影の一意性）$\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in \mathbf{R}^n$ が与えられているとして

$$L = L(\vec{a}, \vec{b}) = \{x\vec{a} + y\vec{b};\ x, y \in \mathbf{R}\}$$

を考えます．$\vec{v}_0, \vec{w} \in \mathbf{R}$ が

$$\vec{v}_0 \in L, \quad \vec{c} - \vec{v}_0 \perp L$$

$$\vec{w}_0 \in L, \quad \vec{c} - \vec{w}_0 \perp L$$

が成立するならば $\vec{v}_0 = \vec{w}_0$ が成立することを示しましょう．

解答 任意の $\vec{\alpha} \in L$ に対して

$$(\vec{c} - \vec{v}_0, \vec{\alpha}) = (\vec{c} - \vec{w}_0, \vec{\alpha}) = 0$$

が成立します．これから

$$(\vec{w}_0 - \vec{v}_0, \vec{\alpha}) = ((\vec{c} - \vec{v}_0) - (\vec{c} - \vec{w}_0), \vec{\alpha}) = (\vec{c} - \vec{v}_0, \vec{\alpha}) - (\vec{c} - \vec{w}_0, \vec{\alpha}) = 0$$

が導けます．ここで $\vec{\alpha} = \vec{w}_0 - \vec{v}_0 \in L$ とすると

$$||\vec{w}_0 - \vec{v}_0||^2 = 0$$

から $\vec{w}_0 = \vec{v}_0$ が導けます．