2019年6月21日確認問題解答

I 3次の基本行列を分類の上すべて列挙して逆行列を求めましょう.

(i) $i \neq j$ として, i 行と j 行を交換する基本行列

$$P_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad P_{12}^{-1} = P_{12}$$

$$P_{13} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad P_{13}^{-1} = P_{13}$$

$$P_{23} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad P_{23}^{-1} = P_{23}$$

(ii) $\lambda \neq 0$ として, i 行を λ 倍する基本行列

$$Q_1(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad Q_1(\lambda)^{-1} = Q_1(\frac{1}{\lambda})$$

$$Q_2(\lambda) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad Q_2(\lambda)^{-1} = Q_2(\frac{1}{\lambda})$$

$$Q_3(\lambda) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}, \qquad Q_3(\lambda)^{-1} = Q_3(\frac{1}{\lambda})$$

(iii) $i \neq j0$ として, i 行の λ 倍を j 行に加える基本行列

$$R_{12}(\lambda) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \lambda & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad R_{12}(\lambda)^{-1} = R_{12}(-\lambda)$$

$$R_{13}(\lambda) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \lambda & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad R_{13}(\lambda)^{-1} = R_{13}(-\lambda)$$

$$R_{23}(\lambda) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \end{pmatrix}, \qquad R_{23}(\lambda)^{-1} = R_{23}(-\lambda)$$

$$R_{21}(\lambda) = \begin{pmatrix} 1 & \lambda & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad R_{21}(\lambda)^{-1} = R_{21}(-\lambda)$$

$$R_{31}(\lambda) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \lambda \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad R_{31}(\lambda)^{-1} = R_{31}(-\lambda)$$

$$R_{32}(\lambda) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \lambda \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad R_{32}(\lambda)^{-1} = R_{32}(-\lambda)$$

II 次の $\vec{a},\vec{b},\vec{\alpha},\vec{\beta}\in\mathbf{R}^n$ に対して以下の (i),(ii),(iii),(iv) を示しましょう.

(i)$\vec{a}\nparallel\vec{b}$ を示しましょう.

(ii)

$$L=\{x\vec{a}+y\vec{b};\ x,y\in\mathbf{R}\}$$

を考えます.

$$\vec{\alpha},\vec{\beta}\in L$$

を示しましょう.

(iii) $\vec{\alpha}\nparallel\vec{\beta}$ を示しましょう.

(iv) L の基底 $\vec{a},\vec{b}$ に関する座標を $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$, 基底 $\vec{\alpha},\vec{\beta}$ に関する座標 $\begin{pmatrix}\xi\\\eta\end{pmatrix}$ とするとき $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ を $\begin{pmatrix}\xi\\\eta\end{pmatrix}$ で表しましょう.

(1) $\vec{a}=\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix},\vec{b}=\begin{pmatrix}2\\-1\\4\end{pmatrix},\vec{\alpha}=\begin{pmatrix}2\\-6\\10\end{pmatrix},\vec{\beta}=\begin{pmatrix}5\\5\\1\end{pmatrix}$

(2) $\vec{a}=\begin{pmatrix}1\\2\\-1\\1\end{pmatrix},\vec{b}=\begin{pmatrix}2\\3\\-2\\1\end{pmatrix},\vec{\alpha}=\begin{pmatrix}2\\5\\-2\\3\end{pmatrix},\vec{\beta}=\begin{pmatrix}5\\8\\-5\\3\end{pmatrix}$

(3) $\vec{a}=\begin{pmatrix}4\\1\\-1\\2\end{pmatrix},\vec{b}=\begin{pmatrix}1\\3\\1\\-1\end{pmatrix},\vec{\alpha}=\begin{pmatrix}6\\7\\1\\0\end{pmatrix},\vec{\beta}=\begin{pmatrix}-1\\8\\4\\-5\end{pmatrix}$

解答 (1)(i) $\begin{vmatrix}1&2\\2&-1\end{vmatrix}=-5\neq0$ から $\vec{a}\nparallel\vec{b}$ が従います.

(ii)

$$\left(\begin{array}{cc|cc}1&2&2&5\\2&-1&-6&5\\-1&4&10&1\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{cc|cc}1&2&2&5\\0&-5&-10&-5\\0&6&12&6\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{cc|cc}1&2&2&5\\0&1&2&1\\0&6&12&6\end{array}\right)$$
$$\to\left(\begin{array}{cc|cc}1&0&-2&3\\0&1&2&1\\0&0&0&0\end{array}\right)$$

から

$$\vec{\alpha}=-2\vec{a}+2\vec{b}\in L,\quad \vec{\beta}=3\vec{a}+\vec{b}\in L$$

が分かります.

(iii) $(\vec{\alpha}\ \vec{\beta})=(\vec{a}\ \vec{b})\begin{pmatrix}-2&3\\2&1\end{pmatrix}$ において $\begin{vmatrix}-2&3\\2&1\end{vmatrix}=-8\neq0$ から $\vec{\alpha}\nparallel\vec{\beta}$ が従います.

(iv)

$$(\vec{\alpha}\ \vec{\beta})\begin{pmatrix}\xi\\ \eta\end{pmatrix}=(\vec{a}\ \vec{b})\begin{pmatrix}-2 & 3\\ 2 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\xi\\ \eta\end{pmatrix}=(\vec{a}\ \vec{b})\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}$$

から

$$\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2 & 3\\ 2 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\xi\\ \eta\end{pmatrix}$$

が従います.

(2)(i) $\begin{vmatrix}1 & 2\\ 2 & 3\end{vmatrix}=-1\neq 0$ から $\vec{a}\nparallel\vec{b}$ が従います.

(ii)

$$\left(\begin{array}{cc|cc}1 & 2 & 2 & 5\\ 2 & 3 & 5 & 8\\ -1 & -2 & -2 & -5\\ 1 & 1 & 3 & 3\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{cc|cc}1 & 2 & 2 & 5\\ 0 & -1 & 1 & -2\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 1 & -2\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{cc|cc}1 & 2 & 2 & 5\\ 0 & 1 & -1 & 2\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 1 & -2\end{array}\right)$$
$$\to\left(\begin{array}{cc|cc}1 & 0 & 4 & 1\\ 0 & 1 & -1 & 2\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right)$$

から

$$\vec{\alpha}=4\vec{a}-\vec{b}\in L,\quad \vec{\beta}=\vec{a}+2\vec{b}\in L$$

が分かります.

(iii) $(\vec{\alpha}\ \vec{\beta})=(\vec{a}\ \vec{b})\begin{pmatrix}4 & 1\\ -1 & 2\end{pmatrix}$ において $\begin{vmatrix}4 & 1\\ -1 & 2\end{vmatrix}=9\neq 0$ から $\vec{\alpha}\nparallel\vec{\beta}$ が従います.

(iv)

$$(\vec{\alpha}\ \vec{\beta})\begin{pmatrix}\xi\\ \eta\end{pmatrix}=(\vec{a}\ \vec{b})\begin{pmatrix}4 & 1\\ -1 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\xi\\ \eta\end{pmatrix}=(\vec{a}\ \vec{b})\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}$$

から

$$\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4 & 1\\ -1 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\xi\\ \eta\end{pmatrix}$$

が従います.

(3)(i) $\begin{vmatrix}4 & 1\\ 1 & 3\end{vmatrix}=11\neq 0$ から $\vec{a}\nparallel\vec{b}$ が従います.

(ii)

$$\left(\begin{array}{cc|cc}4 & 1 & 6 & -1\\ 1 & 3 & 7 & 8\\ -1 & 1 & 1 & 4\\ 2 & -1 & 0 & -5\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{cc|cc}1 & 3 & 7 & 8\\ 4 & 1 & 6 & -1\\ -1 & 1 & 1 & 4\\ 2 & -1 & 0 & -5\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{cc|cc}1 & 3 & 7 & 8\\ 0 & -11 & -22 & -33\\ 0 & 4 & 8 & 12\\ 0 & -7 & -14 & -21\end{array}\right)$$
$$\to\left(\begin{array}{cc|cc}1 & 3 & 7 & 8\\ 0 & 1 & 2 & 3\\ 0 & 4 & 8 & 12\\ 0 & -7 & -14 & -21\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{cc|cc}1 & 0 & 1 & -1\\ 0 & 1 & 2 & 3\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right)$$

から

$$\vec{\alpha} = \vec{a} + 2\vec{b} \in L, \quad \vec{\beta} = -\vec{a} + 3\vec{b} \in L$$

が分かります.

(iii) $(\vec{\alpha}\ \vec{\beta}) = (\vec{a}\ \vec{b}) \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ において $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 5 \neq 0$ から $\vec{\alpha} \not\parallel \vec{\beta}$ が従います.

(iv)

$$(\vec{\alpha}\ \vec{\beta}) \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} = (\vec{a}\ \vec{b}) \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} = (\vec{a}\ \vec{b}) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

から

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix}$$

が従います.

III 次の $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbf{R}^n$ に対して 2 列の行列 $X = (\vec{a}\ \vec{b})$ を定めます. ${}^tXX$ と $\det({}^tXX)$ を求めましょう.

(1) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, **(2)** $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$,

(3) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

解答　$X = (\vec{a}\ \vec{b})$ に対して

$$\begin{aligned} {}^tXX &= \begin{pmatrix} {}^t\vec{a} \\ {}^t\vec{b} \end{pmatrix} (\vec{a}\ \vec{b}) = \begin{pmatrix} {}^t\vec{a} \cdot \vec{a} & {}^t\vec{a} \cdot \vec{b} \\ {}^t\vec{b} \cdot \vec{a} & {}^t\vec{b} \cdot \vec{b} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} ||\vec{a}||^2 & (\vec{a}, \vec{b}) \\ (\vec{b}, \vec{a}) & ||\vec{b}||^2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

となることに注意しましょう. ここで $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbf{R}^n$ に対して

$${}^t\vec{a} \cdot \vec{b} = (\vec{a}, \vec{b})$$

であることを用いました. ここで計算する ${}^tXX$ を X の Gram 行列と呼びます.

(1)

$${}^tXX = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}, \quad \det({}^tXX) = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} = 14$$

(2)

$${}^tXX = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 6 & 12 \end{pmatrix}, \quad \det({}^tXX) = \begin{vmatrix} 3 & 6 \\ 6 & 12 \end{vmatrix} = 0$$

(3)

$${}^tXX = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}, \quad \det({}^tXX) = \begin{vmatrix} 4 & -1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = 11$$

注意　上の $X = (\vec{a}\ \vec{b})$ に対して

$${}^tXX \text{ が正則 } \Leftrightarrow \vec{a} \not\parallel \vec{b}$$

が成立します. $\det({}^tXX)$ の値に注意しましょう.

IV 3 行の行列 $A = \begin{pmatrix} \mathbf{a}_1 \\ \mathbf{a}_2 \\ \mathbf{a}_3 \end{pmatrix}$ に 3 次正方行列 X を掛けたとき以下が成立します．X を求めましょう．

(1) $XA = \begin{pmatrix} \mathbf{a}_1 \\ \mathbf{a}_3 \\ \mathbf{a}_2 \end{pmatrix}$　**(2)** $XA = \begin{pmatrix} \mathbf{a}_1 \\ \mathbf{a}_2 \\ \lambda\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_3 \end{pmatrix}$

(3) $XA = \begin{pmatrix} \mathbf{a}_1 \\ \lambda\mathbf{a}_2 \\ \mathbf{a}_3 \end{pmatrix}$　**(4)** $XA = \begin{pmatrix} \alpha\mathbf{a}_1 \\ \beta\mathbf{a}_2 \\ \gamma\mathbf{a}_3 \end{pmatrix}$

解答

(1) $X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$　**(2)** $X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \lambda & 0 & 1 \end{pmatrix}$　**(3)** $X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$　**(4)** $X = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix}$

V $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ が定める 2 次元部分空間

$$L = L(\vec{a}, \vec{b}) = \{x\vec{a} + y\vec{b};\ x, y \in \mathbf{R}\}$$

に対して $\vec{v} \in \mathbf{R}^3$ の L への直交射影 $\vec{w}$ を考えます．

$$Q\vec{v} = \vec{w}$$

を満たす 3 次正方行列を求めましょう．

解答 $\vec{a}, \vec{b}$ を正規直交化すると

$$\vec{p} = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{q} = \frac{1}{\sqrt{42}} \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -5 \end{pmatrix}$$

となる（6 月 9 日の確認問題 I(1)）．これから $\vec{v}$ の L への直交射影は

$$\begin{aligned} \vec{w} &= (\vec{p}, \vec{v})\vec{p} + (\vec{q}, \vec{v})\vec{q} \\ &= \vec{p} \cdot {}^t\vec{p}\vec{v} + \vec{q} \cdot {}^t\vec{q}\vec{v} \\ &= \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \vec{v} \\ &\qquad + \frac{1}{\sqrt{42}} \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -5 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{42}} \begin{pmatrix} 4 & 1 & -5 \end{pmatrix} \vec{v} \\ &= \left(\frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{42} \begin{pmatrix} 16 & 4 & -20 \\ 4 & 1 & -5 \\ -20 & -5 & 25 \end{pmatrix} \right) \vec{v} \\ &= \frac{1}{14} \begin{pmatrix} 10 & 6 & -2 \\ 7 & 5 & 3 \\ -2 & 3 & 13 \end{pmatrix} \vec{v} \end{aligned}$$

から

$$Q = \frac{1}{14} \begin{pmatrix} 10 & 6 & -2 \\ 7 & 5 & 3 \\ -2 & 3 & 13 \end{pmatrix}$$

別解 $L(\vec{a},\vec{b})$ に垂直なベクトルとして $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b} = \left(\begin{smallmatrix} -2 \\ 3 \\ -1 \end{smallmatrix}\right)$ を取ります．このとき $\vec{v}$ の $\vec{c}$ への直交射影を $\vec{z}$ とすると

$$\vec{v} = \vec{w} + \vec{z}$$

が成立します．これから

$$\begin{aligned}
\vec{w} &= \vec{v} - \frac{(\vec{c},\vec{v})}{\|\vec{c}\|^2}\vec{c} \\
&= \vec{v} - \frac{1}{\|\vec{c}\|^2}\vec{c}^t\vec{c}\vec{v} \\
&= I_3\vec{v} - \frac{1}{14}\left(\begin{smallmatrix} 4 & -6 & 2 \\ -6 & -9 & -3 \\ 2 & -3 & 1 \end{smallmatrix}\right)\vec{v} \\
&= \left(I_3 - \frac{1}{14}\left(\begin{smallmatrix} 4 & -6 & 2 \\ -6 & -9 & -3 \\ 2 & -3 & 1 \end{smallmatrix}\right)\right)\vec{v} \\
&= \frac{1}{14}\left(\begin{smallmatrix} 10 & 6 & -2 \\ 7 & 5 & 3 \\ -2 & 3 & 13 \end{smallmatrix}\right)\vec{v}
\end{aligned}$$

となります．

VI 以下の $\vec{a},\vec{b},\vec{c} \in \mathbf{R}^n$ に対して $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ が張る部分空間

$$L_3 = L(\vec{a},\vec{b},\vec{c}) = \{x\vec{a} + y\vec{b} + z\vec{c};\ x,y,z \in \mathbf{R}\}$$

の正規直交基底を求めましょう．

(1) $\vec{a} = \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right), \vec{b} = \left(\begin{smallmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{smallmatrix}\right), \vec{c} = \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$ **(2)** $\vec{a} = \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{smallmatrix}\right), \vec{b} = \left(\begin{smallmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{smallmatrix}\right), \vec{c} = \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$

(3) $\vec{a} = \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{smallmatrix}\right), \vec{b} = \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right), \vec{c} = \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$ **(4)** $\vec{a} = \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{smallmatrix}\right), \vec{b} = \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{smallmatrix}\right), \vec{c} = \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$

解答

(1) 6 月 6 日の確認問題 I(1) から

$$L =: \{x\vec{a} + y\vec{b};\ x,y \in \mathbf{R}\}$$

の正規直交系として

$$\vec{p} = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{q} = \frac{1}{\sqrt{42}}\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -5 \end{pmatrix}$$

で, $\vec{c}$ の L への直交射影が

$$\begin{aligned}
\vec{w}_2 &= (\vec{c},\vec{p})\vec{p} + (\vec{c},\vec{q})\vec{q} \\
&= \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right) \cdot \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{42}}\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -5 \end{pmatrix}\right) \cdot \frac{1}{\sqrt{42}}\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -5 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{14}\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 13 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

となります．L に垂直な L_3 中のベクトルとして

$$\vec{c} - \vec{w}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{14}\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 13 \end{pmatrix} = \frac{1}{14}\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

を考えると，これを正規化して

$$\vec{r} = \frac{1}{||\vec{c} - \vec{w}_2||}(\vec{c} - \vec{w}_2) = \frac{1}{\sqrt{14}}\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

と定めると $\vec{p}, \vec{q}, \vec{r}$ が L_3 の正規直交基底となります.
(2) 6 月 6 日の確認問題 I(2) から

$$L =: \{x\vec{a} + y\vec{b};\ x, y \in \mathbf{R}\}$$

の正規直交系として

$$\vec{p} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \vec{q} = \frac{1}{\sqrt{34}}\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$$

で, $\vec{c}$ の L への直交射影が

$$\begin{aligned} \vec{w}_2 &= (\vec{c}, \vec{p})\vec{p} + (\vec{c}, \vec{q})\vec{q} \\ &= \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}\right) \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{34}}\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}\right) \cdot \frac{1}{\sqrt{34}}\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{17}\begin{pmatrix} -4 \\ 6 \\ 13 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

となります. L に垂直な L_3 中のベクトルとして

$$\vec{c} - \vec{w}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{17}\begin{pmatrix} -4 \\ 6 \\ 13 \end{pmatrix} = \frac{1}{17}\begin{pmatrix} 4 \\ -6 \\ 4 \end{pmatrix}$$

を考えると，これを正規化して

$$\vec{r} = \frac{1}{||\vec{c} - \vec{w}_2||}(\vec{c} - \vec{w}_2) = \frac{1}{\sqrt{17}}\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

と定めると $\vec{p}, \vec{q}, \vec{r}$ が L_3 の正規直交基底となります.
(3) $\vec{b}$ の $\vec{a}$ 方向への直交射影 $\vec{w}$ は

$$\vec{w} = \frac{(\vec{a}, \vec{b})}{||\vec{a}||^2} = \frac{1}{4}\vec{a}$$

と求められます. このとき $\vec{a}$ の垂直なベクトルとして

$$\vec{b} - \vec{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$$

が求まります. このとき $\vec{a}$ と $\vec{b} - \vec{w}$ を正規化した

$$\vec{p} = \frac{1}{||\vec{a}||}\vec{a} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \vec{q} = \frac{1}{||\vec{b} - \vec{w}||}(\vec{b} - \vec{w}) = \frac{1}{\sqrt{44}}\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$$

が

$$L =: \{x\vec{a} + y\vec{b};\ x, y \in \mathbf{R}\}$$

の正規直交基底となります．$\vec{c}$ の L への直交射影が

$$\begin{aligned}
\vec{w}_2 &= (\vec{c}, \vec{p})\vec{p} + (\vec{c}, \vec{q})\vec{q} \\
&= \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right) \cdot \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{44}}\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} \right) \cdot \frac{1}{\sqrt{44}}\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{11}\begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

となります．L に垂直な L_3 中のベクトルとして

$$\vec{c} - \vec{w}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{1}{11}\begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{11}\begin{pmatrix} 6 \\ -2 \\ -5 \\ -1 \end{pmatrix}$$

を考えると，これを正規化して

$$\vec{r} = \frac{1}{||\vec{c} - \vec{w}_2||}(\vec{c} - \vec{w}_2) = \frac{1}{\sqrt{66}}\begin{pmatrix} 6 \\ -2 \\ -5 \\ -1 \end{pmatrix}$$

と定めると $\vec{p}, \vec{q}, \vec{r}$ が L_3 の正規直交基底となります．

(4) 6 月 6 日の確認問題 I(4) から

$$L =: \{x\vec{a} + y\vec{b};\ x, y \in \mathbf{R}\}$$

の正規直交系として

$$\vec{p} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \vec{q} = \frac{1}{\sqrt{20}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$$

を求めました．$\vec{c}$ の L への直交射影が

$$\begin{aligned}
\vec{w}_2 &= (\vec{c}, \vec{p})\vec{p} + (\vec{c}, \vec{q})\vec{q} \\
&= \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right) \cdot \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{20}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} \right) \cdot \frac{1}{\sqrt{20}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{10}\begin{pmatrix} -1 \\ -4 \\ 2 \\ 7 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

となります．L に垂直な L_3 中のベクトルとして

$$\vec{c}-\vec{w}_2=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}-\frac{1}{10}\begin{pmatrix}-1\\-4\\2\\7\end{pmatrix}=\frac{1}{10}\begin{pmatrix}1\\4\\-2\\3\end{pmatrix}$$

を考えると，これを正規化して

$$\vec{r}=\frac{1}{||\vec{c}-\vec{w}_2||}(\vec{c}-\vec{w}_2)=\frac{1}{\sqrt{30}}\begin{pmatrix}1\\4\\-2\\3\end{pmatrix}$$

と定めると $\vec{p},\vec{q},\vec{r}$ が L_3 の正規直交基底となります．

VII
$\vec{a},\vec{b}\in\mathbf{R}^n$ が張る部分空間

$$L=L(\vec{a},\vec{b})=\{x\vec{a}+y\vec{b};\ x,y\in\mathbf{R}\}$$

を考えます．

$$\vec{c},\vec{d}\in L,\lambda,\mu\in\mathbf{R}\quad\Rightarrow\quad\lambda\vec{c}+\mu\vec{d}\in L$$

を示しましょう．

解答 $\vec{\alpha},\vec{\beta}\in L$ であるので

$$\vec{\alpha}=x_1\vec{a}+y_1\vec{b},\quad\vec{\beta}=x_2\vec{a}+y_2\vec{b}$$

と表されます．このとき

$$\begin{aligned}\vec{\alpha}+\vec{\beta}&=x_1\vec{a}+y_1\vec{b}+x_2\vec{a}+y_2\vec{b}\\&=(x_1+x_2)\vec{a}+(y_1+y_2)\vec{b}\in L\\\lambda\vec{\alpha}&=\lambda(x_1\vec{a}+y_1\vec{b})=(\lambda x_1)\vec{a}+(\lambda y_1)\vec{b}\in L\end{aligned}$$

となります．

VIII
(1) $\vec{a},\vec{b}\in\mathbf{R}^n$ に対して

$${}^t(\vec{a}+\vec{b})={}^t\vec{a}+{}^t\vec{b},\quad{}^t(\lambda\vec{a})=\lambda\cdot{}^t\vec{a}$$

を示しましょう．
(2) $\mathbf{a},\mathbf{b}\in(\mathbf{R}^n)^*$ に対して

$${}^t(\mathbf{a}+\mathbf{b})={}^t\mathbf{a}+{}^t\mathbf{b},\quad{}^t(\lambda\mathbf{a})=\lambda\cdot{}^t\mathbf{b}$$

を示しましょう．

解答

(1)

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_i \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_i \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

とすると

$$\begin{aligned} {}^t(\vec{a}+\vec{b}) &= {}^t\begin{pmatrix} a_1+b_1 \\ \vdots \\ a_i+b_i \\ \vdots \\ a_n+b_n \end{pmatrix} = (a_1+b_1 \ \ldots \ a_i+b_i \ \ldots \ a_n+b_n) \\ &= (a_1 \ \ldots \ a_i \ \ldots \ a_n) + (b_1 \ \ldots \ b_i \ \ldots \ b_n) = {}^t\vec{a} + {}^t\vec{b} \\ {}^t(\lambda\vec{a}) &= {}^t\begin{pmatrix} \lambda a_1 \\ \vdots \\ \lambda a_i \\ \vdots \\ \lambda a_n \end{pmatrix} = (\lambda a_1 \ \ldots \ \lambda a_i \ \ldots \ \lambda a_n) \\ &= \lambda(a_1 \ \ldots \ a_i \ \ldots \ a_n) = \lambda {}^t\vec{a} \end{aligned}$$

(2)

$$\mathbf{a} = (a_1 \ \ldots \ a_j \ \ldots \ a_n), \quad \mathbf{b} = (b_1 \ \ldots \ b_j \ \ldots \ b_n)$$

とすると

$$\begin{aligned} {}^t(\mathbf{a}+\mathbf{b}) &= {}^t(a_1+b_1 \ \ldots \ a_j+b_j \ \ldots \ a_n+b_n) \\ &= \begin{pmatrix} a_1+b_1 \\ \vdots \\ a_j+b_j \\ \vdots \\ a_n+b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_j \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_j \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = {}^t\mathbf{a} + {}^t\mathbf{b} \\ {}^t(\lambda\mathbf{a}) &= {}^t(\lambda a_1 \ \ldots \ \lambda a_j \ \ldots \ \lambda a_n) \\ &= \begin{pmatrix} \lambda a_1 \\ \vdots \\ \lambda a_j \\ \vdots \\ \lambda a_n \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_j \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \lambda \cdot {}^t\mathbf{a} \end{aligned}$$