逆行列のクラメールの公式

戸瀬　信之

ITOSE PROJECT

SLIN2019Lec01，2019 年 06 月 07 日 at Komaba

列に関する余因子展開

$$
\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}
\begin{aligned}
&= a_1 \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} - a_2 \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} + a_3 \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix} \\
&= -b_1 \begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix} + b_2 \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix} - b_3 \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix} \\
&= c_1 \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} - c_2 \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} + c_3 \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}
\end{aligned}
$$

行列の積で表す

$$\begin{pmatrix} \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} |A| & * & * \\ * & |A| & * \\ * & * & |A| \end{pmatrix}$$

右辺の $\mathbf{3}$ 次正方行列の非対角成分は $\mathbf{0}$, e.g. 1 行 2 列は

$$\boldsymbol{b}_1\begin{vmatrix}\boldsymbol{b}_2 & \boldsymbol{c}_2\\ \boldsymbol{b}_3 & \boldsymbol{c}_3\end{vmatrix} - \boldsymbol{b}_2\begin{vmatrix}\boldsymbol{b}_1 & \boldsymbol{c}_1\\ \boldsymbol{b}_3 & \boldsymbol{c}_3\end{vmatrix} + \boldsymbol{b}_3\begin{vmatrix}\boldsymbol{b}_1 & \boldsymbol{c}_1\\ \boldsymbol{b}_2 & \boldsymbol{c}_3\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}\boldsymbol{b}_1 & \boldsymbol{b}_1 & \boldsymbol{c}_1\\ \boldsymbol{b}_2 & \boldsymbol{b}_2 & \boldsymbol{c}_2\\ \boldsymbol{b}_3 & \boldsymbol{b}_3 & \boldsymbol{c}_3\end{vmatrix} = \mathbf{0}$$

行列の積で表す (3)

$$\begin{pmatrix} \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} |A| & 0 & 0 \\ 0 & |A| & \\ 0 & 0 & |A| \end{pmatrix} = |A| \cdot I_3$$

行に関する余因子展開

$$\begin{aligned}\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} &= a_1 \begin{vmatrix} b_2 & b_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix} - a_2 \begin{vmatrix} b_1 & b_3 \\ c_1 & c_3 \end{vmatrix} + a_3 \begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix} \\ &= -b_1 \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix} + b_2 \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ c_1 & c_3 \end{vmatrix} - b_3 \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix} \\ &= c_1 \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} - c_2 \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} + c_3 \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}\end{aligned}$$

行列の積で表す (1)'

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} b_2 & b_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} b_1 & b_3 \\ c_1 & c_3 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ c_1 & c_3 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} |A| & * & * \\ * & |A| & * \\ * & * & |A| \end{pmatrix}$$

行列の積で表す (2)'

右辺の $\mathbf{3}$ 次正方行列の非対角成分は $\mathbf{0}$, e.g. 3 行 2 列は

$$-\boldsymbol{c}_1\begin{vmatrix}\boldsymbol{a}_2 & \boldsymbol{a}_3\\ \boldsymbol{c}_2 & \boldsymbol{c}_3\end{vmatrix}+\boldsymbol{c}_2\begin{vmatrix}\boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{a}_3\\ \boldsymbol{c}_1 & \boldsymbol{c}_3\end{vmatrix}-\boldsymbol{c}_3\begin{vmatrix}\boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{a}_3\\ \boldsymbol{c}_1 & \boldsymbol{c}_3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{a}_2 & \boldsymbol{a}_3\\ \boldsymbol{c}_1 & \boldsymbol{c}_2 & \boldsymbol{c}_3\\ \boldsymbol{c}_1 & \boldsymbol{c}_2 & \boldsymbol{c}_3\end{vmatrix}$$

行列の積で表す (3)'

$$
\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix}
\begin{pmatrix}
\begin{vmatrix} b_2 & b_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} \\
-\begin{vmatrix} b_1 & b_3 \\ c_1 & c_3 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ c_1 & c_3 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} \\
\begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}
\end{pmatrix}
$$

$$
= \begin{pmatrix} |A| & 0 & 0 \\ 0 & |A| & 0 \\ 0 & 0 & |A| \end{pmatrix} = |A| \cdot I_3
$$

余因子行列 (1)

3 次正方行列 $A = (a_{ij}) \in M_3(\mathbf{K})$ に対して

$$A_{ij} \in M_2(\mathbf{K})$$

を A から i 行と j 列を除いた $\mathbf{2}$ 次正方行列とします.

例 $A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix}$ に対して

$$A_{11} = \begin{pmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{pmatrix}, \quad A_{13} = \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{pmatrix}$$

$$\tilde{A}_{ij} := (-1)^{i+j} \det(A_{ij})$$

を用いて

$$\tilde{A} = (\tilde{A}_{ji})_{i,j} = \begin{pmatrix} \tilde{A}_{11} & \tilde{A}_{21} & \tilde{A}_{31} \\ \tilde{A}_{12} & \tilde{A}_{22} & \tilde{A}_{32} \\ \tilde{A}_{13} & \tilde{A}_{23} & \tilde{A}_{33} \end{pmatrix}$$

を A の余因子行列と呼びます.

定理 $\tilde{A}A = A\tilde{A} = |A| \cdot I_3$

余因子行列 (3)

定義　$A \in M_3(\mathrm{K})$ が正則であるとは，ある $X \in M_3(\mathrm{K})$ に対して

$$AX = XA = I_3$$

注意 $A, X, Y \in M_3(\mathrm{K})$ に対して

$$AX = XA = I_3, \quad AY = YA = I_3 \Rightarrow X = Y$$

定理 $|A| \neq 0$ ならば A は正則で

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\tilde{A}$$

注意 $A, B \in M_3(\mathrm{K})$ に対して

$$(\lambda A)B = A(\lambda B) = \lambda(AB)$$

定理 $\boldsymbol{A} \in \boldsymbol{M_3(\mathrm{K})}$ に対して

$$\textbf{(1)}\ \boldsymbol{A}\text{は正則} \quad \Leftrightarrow \quad \textbf{(2)}\ \left(\boldsymbol{A\vec{v} = \vec{0} \Rightarrow \vec{v} = \vec{0}}\right) \quad \Leftrightarrow \quad \textbf{(3)}\ |\boldsymbol{A}| \neq \mathbf{0}$$

$A = (\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c})$ とする．$|A| = 0$ ならば

$$A\tilde{A} = |A|I_3 = O_3$$

(i) $\tilde{A} \neq O_3$ ならば $\tilde{A} = (\vec{p}\ \vec{q}\ \vec{r})$ とすると $\vec{p}, \vec{q}, \vec{r}$ の少なくとも 1 個が非自明解となります．

(ii) $\tilde{A} = O_3$ ならば

$$\vec{a} \parallel \vec{b}, \quad \vec{b} \parallel \vec{c}, \quad \vec{c} \parallel \vec{a}$$

分類

$\lvert A\rvert \neq 0$	$\ker A = \{\vec{0}\}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
$\lvert A\rvert = 0,\ \tilde{A} \neq O_3$	$\exists \vec{v}_1 \neq \vec{0}\ \ker(A) = \mathrm{K}\vec{v}_1$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & * \\ 0 & 1 & * \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & * & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
$\lvert A\rvert = 0,\ \tilde{A} = O_3$ $A \neq O_3$	$\exists \vec{v}_1, \exists \vec{v}_2 \in \mathrm{K}^3$ $\vec{v}_1 \nparallel \vec{v}_2,\ \ker(A) = \mathrm{K}\vec{v}_1 + \mathrm{K}\vec{v}_2$	$\begin{pmatrix} 1 & * & * \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & * \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
$A = O_3$	$\ker(A) = \mathrm{K}^3$	O_3

階数標準形

行基本変形によって $\boldsymbol{A \in M_3(\mathrm{K})}$ が狭義の階段行列 $\boldsymbol{A_0 \in M_3(\mathrm{K})}$ に変形されるとき：

$$\boldsymbol{A \to \cdots \to A_0}$$

$\boldsymbol{A}$ に対して $\boldsymbol{A_0}$ は一意的に定まります．$\boldsymbol{A_0}$ を $\boldsymbol{A}$ の階数標準形と呼びます．